Министерство образования и науки Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Давлатбеков Фирдавс Давлатбекович

НАИЛУЧШИЕ ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПОПЕРЕЧНИКИ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель
академик АН Республики Таджикистан,
доктор физ.-мат. наук, профессор
Шабозов Мирганд Шабозович

Душанбе – 2019

Содержание

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время вопросам наилучшего полиномиального приближения и вычисления точных значений различных поперечников классов аналитических в круге функций посвящено достаточно много работ, где уже получен целый ряд окончательных результатов.

Первый точный результат по решению экстремальной задачий о нахождении величины наилучшего полиномиального приближения аналитических функций в круге $|z| \leq 1$ с ограниченной в чебышёвской норме r-ой производной найден К.И.Бабенко [7]. Затем в 1967 г. для дробных производных этот результат был обобщён J.T.Scheick [4] и независимо от него В.И.Белым [8].

В дальнейшем вопросами наилучшего полиномиального приближения и нахождения наилучших линейных методов приближения аналитических для некоторых классов функций с ограниченным по норме пространством $H_q,\ q \geq 1$ старшей производной или производной дробного порядка, в основном занимались В.М.Тихомиров [33], Л.В.Тайков [29–32] и М.З.Двейрин [22–24].

Затем в восьмидесятых годах указанная задача изучалась в серии работ S.D.Fisher [1], S.D.Fisher and C.A.Micchelli [2], М.З.Двейрина и И.В.Чебаненко [25], A.Pinkus [3], Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [6], Н.Айнуллоева [5], С.Б.Вакарчука [9–11] для классов функций, задаваемых модулями непрерывности и гладкости r-ой производной и вычислены также точные значения колмогоровских n-поперечников.

В опубликованных работах М.Ш.Шабозова с соавторами [35, 36, 40–43] решены задачи наилучшего полиномиального приближения для классов функций, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка r-ых производных, в пространстве H_2 найдены точные значения n-поперечников для указанных классов функций.

С.Б.Вакарчук [12–16] указал явный вид наилучших линейных методов приближения, реализующих точные значения линейных поперечников для классов функций, рассмотренных Л.В.Тайковым. В совместной работе С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [17] указаны наилучшие линейные методы и оптимальные подпространства, реализующие точные значения поперечников для классов аналитических функций в круге $R \geq 1$, определяемые модулями гладкости в $H_{q,R}$ $(1 \leq q \leq \infty)$, и в весовых пространствах Бергмана.

В данной диссертационной работе найдены наилучшие линейные методы приближения для других классов функций в более общем пространстве $H_{q,\rho}$ $(1 \leq q \leq \infty,\ 0 \leq \rho < 1)$ и с помощи этих методов вычисляются точные значения n-поперечников.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является получение новых результатов, связанных с отысканием наилучших линейных методов приближения классов аналитических в круге функций. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

- найти наилучшие линейные методы приближения классов функций типа Л.В.Тайкова [32] и $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$, вычислить точные значения ряда n-поперечников;
- построить наилучшие линейные методы приближения аналитических в единичном круге функций в метрике пространства Харди, усреднённый модуль непрерывности граничных значений r-ых производных которых мажорируется заданной функцией, и также вычислить точные значения различных n-поперечников класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$;
- найти наилучшие линейные методы приближения аналитических функций для классов $W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ и $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, изучавшихся

Н.Айнуллоевым [5], и вычислить точные значения их линейных и гельфандовских n-поперечников.

Методы исследования. В работе используются современные методы исследования экстремальных задач вариационного содержания и функционального анализа. При оценке снизу n-поперечников используется известный метод В.М.Тихомирова [34].

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- построены наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых модулями непрерывности, и вычислены точные значения различных n-поперечников указанных классов функций;
- найдены наилучшие линейные методы для классов аналитических в круге функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей гладкости r-ых производных.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое и прикладное значение. Они и метод их доказательства могут быть использованы при вычислении n-поперечников классов функций в других банаховых пространствах аналитических функций, таких как весовые пространства Бергмана, Шильдса, Дюрена и Гварадзе.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались:

- на семинарах кафедры математического анализа и теории функций в ХоГУ (Хорог, 2013-2014 г.);
- на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений в ТНУ (Душанбе, 2014-2018 г.);

- на семинарах отдела теории функций Института математики АН Республики Таджикистан под руководством академика АН Республики Таджикистан, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2014-2018 г.);
- на международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвященной 80-летию члена-корреспондента АН Республики Таджикистан В.Я.Стеценко (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- на международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвященной 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Т.С.Собирова (Душанбе, 29-30 октября 2015 г.);
- на международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.);
- на международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций», посвящённой 90-летию доктора физико-математических наук, академика Л.Г.Михайлова (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах, из них 4 статьи в рецензируемых журналах из списка ВАК при Президенте РТ [20, 37, 38, 45], 3 статьи в сборниках трудов конференций и тезисов докладов [18, 19, 21].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. В совместно с М.Ш.Шабозовым опубликованных работах [37, 38, 45], научному руководителю принадлежит только выбор метода доказательство. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 84 страницы, из них 78 страниц текста, набранного на LaTeX. Библиография включает 45 наименований на 5 страницах.

Для удобства в диссертации использована сквозная нумерация теорем, лемм, формул, имеющих тройную нумерацию, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Первая глава диссертации, состоящая из трёх параграфов, посвящена нахождению точных значений наилучших приближений аналитических в единичном круге функций алгебраическими комплексными полиномами в пространстве Харди H_q, $1 \leq q \leq \infty$. Приведем содержание первой главы.

В первом параграфе приведены необходимые для дальнейшего определения и обозначения, а в остальных двух параграфах излагаются результаты автора.

Обозначим через $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{C}$ — множество вещественных, положительных, целых, натуральных, целых неотрицательных, комплексных чисел вида $a = \alpha + i\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Говорят, что аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 < \rho \leq 1,\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

принадлежит пространству Харди $H_q,\ 1 \leq q \leq \infty$, если

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \to 1-0} \{M_q(\rho, f)\} := \lim_{\rho \to 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q} :=$$

$$:= \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{it})|^q dt \right)^{1/q} := \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |F(t)|^q dt \right)^{1/q} < \infty,$$

где

$$F(t) := f(e^{it}) = \lim_{\rho \to 1-0} f(\rho e^{it})$$

— угловое граничное значение $f(z)$ (см., например, [27], стр. 192).

При $q = \infty$ дополнительно будем предполагать функции $f \in \mathcal{A}(U)$ в замкнутом круге $\overline{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, которые непрерывны вплоть до границы с нормой

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{H_\infty} = \max\left\{|f(z)| : |z| \leq 1\right\} = \max\left\{|f(e^{it})| : 0 \leq t \leq 2\pi\right\}.$$

Через $f_a^{(r)}(z) = \partial^r f(\rho e^{it})/\partial t^r$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ f_a^{(0)}(z) \equiv f(z))$ обозначим r-ю производную функции $f(z) \in \mathcal{A}(U)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho e^{it}$, то есть положим

$$f_a'(z) := \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = f'(z)zi,$$

$$f_a^{(r)}(z) = \left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a',\ r \geq 2, r \in \mathbb{N},$$

а через $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$ обозначим обычную r-ю производную функции $f(z)$.

Символом $F_a^{(r)}(t)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ F_a^{(0)}(t) \equiv F(t))$ будем обозначать граничные значения аналитической функции $\partial^r f/\partial t^r \overset{def}{=} \partial^r f(\rho e^{it})/\partial t^r,\ r \in \mathbb{Z}_+$, а символом $F^{(r)}(t)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ F^{(0)}(t) \equiv F(t))$ — граничные значения аналитической функции $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$.

Через H_q^r $(r \in \mathbb{Z}_+,\ H_q^0 = H_q), 1 \leq q \leq \infty$ обозначим множество аналитических в единичном круге $|z| \leq 1$ функций $f(z) \in H_q, 1 \leq q \leq \infty$, у которых $f^{(r)}(z) \in H_q$, то есть

$$H_q^r = \left\{ f(z) \in H_q :\ \left\| f^{(r)} \right\|_{H_q} < \infty \right\},\ 1 \leq q \leq \infty.$$

Аналогично полагаем:

$$H^r_{q,a}=\left\{f(z)\in H_q:\ \left\|f^{(r)}_a\right\|_{H_q}<\infty\right\},\ 1\le q\le\infty.$$

Во втором параграфе найден наилучший линейный метод приближения классов функций типа Л.В.Тайкова [32] и вычислены точные значения ряда n-поперечников для указанного класса.

Пусть $\Phi(x)$ $(x\ge 0)$ — произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0)=0$. Используя функцию $\Phi(x)$ в качестве мажоранты, рассмотрим следующий класс функций:

$$W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)=\left\{f\in H^{(r)}_q:\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega(f^{(r)};2t)_q\,dt\le\Phi(h)\right\}.$$

Пусть X — банаховое пространство; S — единичный шар в нём; $\mathfrak{M}$ — некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X; $L_n\subset X$ — n-мерное линейное подпространство; $L^n\subset X$ — линейное подпространство коразмерности n; $\mathscr{L}(X,L_n):=\{\Lambda:X\to L_n\}$ — множество линейных непрерывных операторов $\{\Lambda\}$, отображающих пространство X в L_n.

Равенством

$$E(\mathfrak{M},L_n)_X=\sup\Big\{\inf\big\{\|f-\varphi\|_X:\ \varphi\in L_n\big\}:f\in\mathfrak{M}\Big\}$$

соответственно обозначим наилучшее приближение элемента $f\in X$ и фиксированного множества $\mathfrak{M}\subset X$ фиксированным подпространством $L_n\subset X$.

Величина

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M},L_n)_X=\inf\Big\{\sup\big\{||f-\Lambda(f,L_n)||_X:f\in\mathfrak{M}\big\}:\Lambda\subset\mathscr{L}(X,L_n)\Big\}$$

характеризует наилучшее линейное приближение $\mathfrak{M}\subset X$ элементами L_n.

Величины

$$b_n(\mathfrak{M};X)=\sup\Big\{\sup\{\varepsilon>0:\ \varepsilon S\cap L_{n+1}\subset\mathfrak{M}\}:L_{n+1}\subset X\Big\},\qquad(1)$$

$$d_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\Big\{E(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X\Big\}, \tag{2}$$

$$d^n(\mathfrak{M}; X) = \inf\Big\{\sup\{\|f\|_X :\ f \in \mathfrak{M} \cap L^n\} : L^n \subset X\Big\}, \tag{3}$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\Big\{\inf\{\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \Lambda, L_n)_X :\ \Lambda \subset \mathscr{L}(X, L_n)\} : L_n \subset X\Big\} \tag{4}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским и линейным* n-поперечниками. Перечисленные аппроксимативные характеристики монотонны по n и между ними имеют место неравенства [3, 34]:

$$b_n(\mathfrak{M}; X) \le \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M}; X) \\ \\ d^n(\mathfrak{M}; X) \end{matrix} \le \delta_n(\mathfrak{M}; X). \tag{5}$$

Из результата работы Л.В.Тайкова [32] следует, что если для любых $n, r \in \mathbb{N},\ \ n > r \ge 1$, функция $\Phi(h)$ при любом $h \in (0, \pi/2]$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2(n-r))} \ge \frac{\pi}{2(n-r)h} \int\limits_0^{(n-r)h} (\sin t)_*\, dt, \tag{6}$$

где

$$(\sin t)_* := \Big\{\sin t,\ \text{если}\ \ 0 < t \le \pi/2;\ \ 1,\ \text{если}\ \ t \ge \pi/2\Big\},$$

то имеют место равенства

$$b_n\Big(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_q\Big) = d_n\Big(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_q\Big) = \frac{\pi}{4\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \tag{7}$$

Через $H_{q,\rho}$ $(0 < \rho \le 1,\ H_{q,1} \equiv H_q)$ обозначим банаховое пространство Харди функций $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$ в круге $|z| < \rho$, для которых имеет место

$$\|f(\cdot)\|_{q,\rho} := \|f(\cdot)\|_{H_{q,\rho}} = \|f(\rho\cdot)\|_q < \infty.$$

Отметим, что на основе соображений, изложенных в работе С.Б.Вакарчука [12, с.32], результат (7) распространяется на пространство $H_{q,\rho}$

$(1 \leq q \leq \infty,\ 0 < \rho \leq 1)$ и мы получим

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (8)$$

Наша цель состоит в распространении результата (8) для линейных и гельфандовских n-поперечников. Для этого построим наилучшие линейные методы для класса функций $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$.

С этой целью для произвольной функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)z^k \in \mathcal{A}(U)$, следуя работе С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [17], запишем линейный полиномиальный оператор:

$$\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;z) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1 + \frac{\alpha_{k,r}\rho^{2(n-k)}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\gamma_{k,r}\left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right) - 1\right]\right\} c_k(f)z^k, \qquad (9)$$

где $n > r$ и числа $\gamma_{k,r}$ определены равенством

$$\gamma_{k,r} = (n-r)\int\limits_0^{\pi/(2(n-r))} \cos(k-r)t\cos(n-r)t dt,\ k \geq r,\ k \in \mathbb{N}.$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.2.1. *Пусть* f — *произвольная аналитическая функция из класса* $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, n, r — *любые натуральные числа,* $n > r$ *и* $0 < \rho \leq 1$. *Тогда*

$$\left\|f - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\rho}} \leq \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\ \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (10)$$

Если мажорирующая функция $\Phi(h)$ *при любом* $h \in (0, \pi/2]$ *удовлетворяет условию (6), то неравенство (10) является точным в том смысле, что существует функция* $f_1 \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \le q \le \infty)$, *для которой неравенство (10) обращается в равенство.*

С помощью результата теоремы 1.2.1, сформулируем основной результат второго параграфа в виде следующего утверждения.

Теорема 1.2.2. *Пусть мажоранта* $\Phi(h)$ *при любом* $h \in (0, \pi/2]$ *удовлетворяет условию (6) и пусть* $\pi_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$. *Тогда для всех* $n, r \in \mathbb{N},\ n > r$ *справедливы равенства*

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_{q,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); \Lambda_{n-1,r-1,\rho}\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (11)$$

В третьем параграфе построены наилучшие линейные методы приближения классов функций, принадлежащих пространству H_q, $1 \le q \le \infty$, усреднённые модули непрерывности граничных значений производных $f^{(r)}(z)$, которых мажорируются функцией Φ и вычислены точные значения n-поперечников.

Пусть $\Phi(x)$ $(x \ge 0)$ — произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Используя $\Phi(x)$ в качестве мажоранты, рассмотрим следующий класс функций:

$$W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu) = \left\{ f \in H_q^{(r)} : \frac{1}{h}\int_0^h \omega(f^{(r)}; 2t)_q \left[1 + (\mu^2 - 1) sin\frac{\pi t}{2h}\right] dt \le \Phi(h) \right\},$$

где $h \in (0, \pi/2],\ r \in \mathbb{N},\ 1 \le q \le \infty$ и $\mu \ge 1$ — произвольное фиксированное число.

Из основного результата работы Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [6] после некоторых простых вычислений следует, что для произвольной функции $f \in H_q^{(r)}$, при любом $\mu \geq 1$ выполняется неравенство

$$E_{n-1}(f)_q \leq \frac{n-r}{2\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \omega(f^{(r)}, 2t)_q \big\{1 + (\mu^2-1) sin\mu(n-r)t\big\} dt. \qquad (12)$$

Для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$, учитывая определение класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$, из неравенства (12) получаем

$$E_{n-1}(f)_q \leq \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \left(\frac{2\mu(n-r)}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \omega(f^{(r)}, 2t)_q \big\{1 + (\mu^2-1) sin\mu(n-r)t\big\} dt \right) \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \ 1 \leq \mu < \infty, \ n, r \in \mathbb{N}, \ n > r, \ 1 \leq q \leq \infty,$$

откуда следует

$$E_{n-1}\Big(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\Big)_q = \sup\Big\{E_{n-1}(f)_q : f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\Big\} \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \qquad (13)$$

Неравенством (13) пользуемся при оценке сверху n-поперечников.

Теорема 1.3.1. *Если при заданном $\mu \geq 1$ и при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $h \in (0, \pi/2]$ мажоранта $\Phi(h)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2\mu(n-r))} \geq \frac{\pi}{2\mu} \int\limits_0^1 (\sin(n-r)ht)_* \left[1 + (\mu^2-1) sin\frac{\pi t}{2}\right] dt, \qquad (14)$$

то при любых $r \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$b_n\Big(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_q\Big) = d_n\Big(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_q\Big) =$$

$$= E_{n-1}\Big(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\Big)_{H_q} = \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \qquad (15)$$

где $b_n(\cdot)$ — n-поперечник Бернштейна, $d_n(\cdot)$ — n-поперечник Колмогорова,

$$E_{n-1}\Big(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\Big)_{H_q} := \sup\Big\{E_{n-1}(f)_{H_q} : f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\Big\}$$

и $\alpha_{n,r} := n(n-1)...(n-r+1),\ n \geq r$. *Множество мажорант* $\{\Phi\}$, *удовлетворяющих условию (14), не пусто. Этому условию удовлетворяет, например, мажоранта* $\Phi_*(u) = u^{\alpha(\mu)}$, *где*

$$\alpha(\mu) = \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2 \int\limits_0^1 t \cos\frac{\pi t}{2\mu}\left[1 + (\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right]\, dt$$

и, в частности,

$$\alpha(1) = \frac{\pi}{2} - 1, \lim_{\mu\to\infty} \alpha(\mu) = 1,$$

причём для всех $\mu \in [1, \infty)$ *выполняется неравенство* $(\pi/2) - 1 \leq \alpha(\mu) \leq 1$.

Используя неравенство ([34], с.49)

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\,\rho}} \leq \rho^n E_{n-1}(f)_{H_q},\ 1 \leq q \leq \infty,\ 0 < \rho \leq 1 \tag{16}$$

и определение бернштейновского n-поперечника, распространяем результат (15) теоремы 1.3.1 на пространство $H_{q,\,\rho}$ $(0 < \rho \leq 1, 1 \leq q \leq \infty)$.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N},\ n > r$ *и мажоранта* $\Phi(h)$ *удовлетворяет условию (14) при любом* $h \in (0, \pi/2]$. *Тогда при всех* $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$ *и* $\mu \geq 1$ *имеют место равенства*

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_{H_{q,\,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{17}$$

Имеет место следующее более общее утверждение

Теорема 1.3.3. *Если при заданном* $\mu \geq 1$, *любых* $n \in \mathbb{N}$, $0 < h \leq \pi/2$ *мажоранта* $\Phi(h)$ *удовлетворяет ограничения (14), то и для всех* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r,\ 0 < \rho \leq 1,\ 1 \leq q \leq \infty$ *справедливы равенство*

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\,\rho}\right) = E\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu) : \Lambda_{n-1,r-1,\rho} : \mathcal{P}_{n-1}\right)_{H_{q,\,\rho}} :=$$

$$= \sup\left\{\left\|f - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\,\rho}} : f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\} =$$

$$= \frac{\pi\rho^n}{4\mu(n-r)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{18}$$

Здесь $\pi_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot)$*, линейный полиномиальный оператор* $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)$ *определяется равенством*

$$\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f,z) := \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\rho^{2(n-k)}\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k(f)z^k, \tag{19}$$

где $n > r$ *и* $\gamma_{k,r} := (n-r)\mu \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \cos kt \ \cos(n-r)\mu t dt.$

При этом: а) линейный полиномиальный непрерывный оператор (19) является наилучшим линейным методом приближения класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ *в метрике пространства* $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty, \ 0 < \rho \le 1)$*;*

б) $L^*_{n+1} := span\{1, z, ..., z^n\}$ *есть оптимальное подпространство для бернштейновского* n*-поперечника* $b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right)$*;*

в) $L^*_n := span\{1, z, ..., z^{n-1}\}$ *является оптимальным подпространством для колмогоровского* n*-поперечника* $d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right)$*;*

г) $L^n_* := \{f : f \in H_{q,\rho}, f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, ..., n-1\}$ *является для гельфандовского* n*-поперечника* $d^n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right)$ *оптимальным подпространством;*

д) $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}$*, определённый равенством (19), является оптимальным линейным методом (подпространством), реализующим линейный* n*-поперечник* $\delta_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right)$*.*

Результат, полученный в теореме 1.3.3, применяем к задаче вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора $c_n(f)$ на классе функций $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$:

Теорема 1.3.4. *Для любых* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$; $\mu \geq 1$ *и* $1 \leq q \leq \infty$ *справедливо равенство*

$$L_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right) = \sup\left\{\Big|c_n(f)\Big| : f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right).$$

Аналогичные результаты для классов функций, определяемых модулями непрерывности от производных по аргументу $f_a^{(r)}(z)$, получены в работе М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [44].

Вторая глава диссертации, состоящая из двух параграфов, посвящена нахождению наилучших линейных методов приближений аналитических в круге $|z| \leq 1$ функций, задаваемых усреднёнными с весом $\dfrac{1}{h}\left(1 + (\mu^2 - 1)\sin\dfrac{\pi t}{2h}\right)$, как значениями модулей гладкости r-ых обычных производных, так и r-ых производных по аргументу и вычислению точных значений линейных и гельфандовских n-поперечников. Решена также задача оптимального восстановления и кодирование линейных функционалов по дискретной информации.

В первом параграфе найдены наилучшие линейные методы приближения аналитических для классов функций, изучавшихся Н.Айнуллоевым [5], и вычислены точные значения их линейных и гельфандовских n-поперечников.

Пусть $\Phi(x)$ $(x \geq 0)$ — произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для любого заданного значения параметра $\mu \geq 1/2$ рассмотрим класс функций [5]:

$$W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu) = \left\{f \in H_{q,a}^{(r)} : \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(f_a^{(r)};2t)_q\left[1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right]dt \leq \Phi(h)\right\},$$

где $r \in \mathbb{N}, h \in (0, \pi/2]$ $1 \leq q \leq \infty$ и μ — произвольное фиксированное число.

В работе Н.Айнуллоева [5] доказано, что если при заданном $\mu \geq 1/2$ и при любом $h, t \in (0, \pi/2]$ мажоранта Φ удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{\pi-2}\int\limits_0^1 \left(1-\cos\frac{\pi h t}{2\tau\mu}\right)_* \left(1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right)\, dt \leq \frac{\Phi(t)}{\Phi(\tau)}, \qquad (20)$$

где $(1-\cos t)_* = \{1-\cos t,\ \text{если}\ 0 \leq t \leq \pi; 2\ \text{если}\ t \geq \pi\}$, то для любого натурального n справедливо равенство

$$d_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu); H_q\right) = \frac{\pi}{2(\pi-2)n^r}\ \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \qquad (21)$$

Условию (20) удовлетворяет мажоранта $\Phi(u) = u^{\alpha(\mu)}$, где

$$\alpha(\mu) = \frac{\pi^2}{2(\pi-2)}\int\limits_0^1 t\left(1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2\mu}\right)\, dt. \qquad (22)$$

Так как $\alpha(1/2) = 4/(3(\pi-2))$ и $\lim\limits_{\mu\to\infty}\alpha(\mu) = 2$, причём $\alpha(\mu)$ непрерывна и возрастает, то границы значения $\alpha = \alpha(\mu)$ удовлетворяют неравенству

$$4/(3(\pi-2)) \leq \alpha(\mu) \leq 2.$$

Пользуясь схемой рассуждений, изложенных в работе С.Б.Вакарчука [15], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [17], результат (21) можно распространить на более общее пространство $H_{q,\rho}$ $(1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq 1)$:

$$b_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu), H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu), H_{q,\rho}\right) =$$

$$= \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)n^r}\ \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \qquad (23)$$

Теорема 2.1.1. *Если при заданном $\mu \geq 1/2$ и при любом $h, t \in (0, \pi/2]$ мажоранта Φ удовлетворяет условию (20), то для любого $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \rho \leq 1$ справедливы равенства*

$$d^n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu); H_{q,\rho}\right) = \delta_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= \sup\left\{ \left\| f - \mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f) \right\|_{H_{q,\,\rho}} : f \in W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu) \right\} =$$

$$= \frac{\pi \rho^n}{2(\pi - 2) n^r}\ \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \tag{24}$$

При этом

$$\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f, z) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-1}\right)^r \rho^{2(n-k)} \left[\gamma_{k,n} \left(1 - (\frac{k}{2n-k})^2\right) - 1 \right] \right\} c_k z^k \tag{25}$$

— наилучший линейный метод приближения класса $W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$ *в метрике пространства* $H_{q,\,\rho}$, *где*

$$\gamma_{k,n} = \frac{2\mu n}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kt (1 - \sin \mu n t)\ dt.$$

Во втором параграфе найдены наилучшие линейные методы приближения аналитических в единичном круге функций для класса $W^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$, задаваемых усреднёнными с весом $\dfrac{1}{h}\left(1 + (\mu^2 - 1)\sin\dfrac{\pi t}{2h}\right)$ значениями модулей гладкости r-ых обычных производных.

Пусть $\Phi(x)$ $(x \geq 0)$ — произвольная положительная неубывающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для любого заданного значения параметра $\mu \geq 1/2$ рассмотрим класс функций (см., [13, с.187], [5, с.95]):

$$W^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu) = \left\{ f \in H_q^{(r)} : \frac{1}{h} \int\limits_0^h \omega_2(F^{(r)}; 2t)_q \left[1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right] dt \leq \Phi(h) \right\},$$

где $r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty$ и $h \in (0, \pi/2]$.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ \mu \geq 1/2$ *и мажоранта* Φ *при всех* $h \in (0, \pi/2]$ *удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\left(\pi/(2\mu(n-r))\right)} \geq$$

$$\geq \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \frac{1}{h} \int\limits_0^h (1-\cos(n-r)t)_* \left(1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right) dt. \tag{26}$$

Тогда при всех $1 \leq q \leq \infty$ *и* $0 < \rho \leq 1$ *имеют место равенства*

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{27}$$

Для нахождения точных значений гельфандовского и линейного n-поперечников нам потребуется построение наилучшего линейного метода приближения функций класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$. С этой целью для произвольной $f \in \mathcal{A}(U)$ запишем следующий линейный полиномиальный оператор

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f;z) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k + \sum_{k=r}^{n-1} \Bigg\{1 + \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\rho^{2(n-k)} \times$$

$$\times \left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\Bigg\} c_k(f)z^k \tag{28}$$

степени $n-1$, где

$$\gamma_{k,r} \overset{def}{=} \frac{2\mu(n-r)}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \Big(1-\sin\mu(n-r)x\Big)\cos(k-r)x dx,\ k \geq r > 1,\ k,r \in \mathbb{N}.$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 2.2.2. *Пусть произвольная функция* $f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, $\mu \geq 1/2$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$, $n,r \in \mathbb{N}$, $n > r$. *Тогда справедливо*

$$\|f - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f)\|_{H_{q,\rho}} \leq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{29}$$

Если мажорирующая функция Φ *при любом* $h \in (0, \pi/2]$ *удовлетворяет ограничению (26), то неравенство (29) неулучшаемо в том смысле, что существует функция* $f_1 \in W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$*, обращающая его в равенство.*

Одним из основных результатов второго параграфа второй главы является

Теорема 2.2.3. *Если при любых* $n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ \mu \geq 1/2$ *мажоранта* Φ *удовлетворяет ограничению (26), то при всех* $0 < \rho \leq 1$ *и* $1 \leq q \leq \infty$ *справедливы равенства*

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu); H_{q,\rho}\right) = \mathscr{E}\left(W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu); \Lambda_{n-1,r,\rho}\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \tag{30}$$

где $\pi_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников: Гельфанда* $d^n(\cdot)$*, линейный* $\delta_n(\cdot)$*. Линейный полиномиальный непрерывный оператор* $\Lambda_{n-1,r,\rho}(\cdot)$*, определённый равенством (28), является наилучшим линейным методом приближения класса* $W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$ *в пространстве* $H_{q,\rho}$*.*

В качестве следствия из теоремы 2.2.3 получаем решение экстремальной задачи вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора $c_n(f)$ на классе $W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty,\ \mu \geq 1/2)$.

Отметим, что аналогичная задача на других классах аналитических функций ранее рассматривалась, например, в работах С.Б.Вакарчука [15], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [17].

Теорема 2.2.4. *При выполнении условий теоремы 2.2.3 справедливо равенство*

$$\sup\left\{|c_n(f)| : f \in W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu)\right\} = \frac{\pi}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \tag{31}$$

где $n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ 1 \leq q \leq \infty.$

Экстремальная задача отыскания точных значений n-поперечников компактных множеств функций тесно связана с задачами оптимизационного содержания, такими как оптимальное восстановление и кодирование линейных функционалов по дискретной информации. В этом пункте мы рассмотрим задачи оптимального восстановления и кодирования в интерпретации Н.П.Корнейчука [26, с.375-384].

Пусть задан набор $\mathcal{M}_n \overset{def}{=} \{\mu_1, \mu_2, \ \cdots\ , \ \mu_n\}$ функционалов $\mu_j \in X^*$, $j = \overline{1, n}$ в нормированном функциональном пространстве X, где X^* — пространство, сопряжённое с X. Множество $\mathcal{M}_n$ можно рассматривать как метод кодирования, сопоставляющий каждому элементу $f \in X$ числовой вектор

$$\Im(f, \mathcal{M}_n) \overset{def}{=} \Big\{\mu_1(f), \mu_2(f), \ \ldots, \ \mu_n(f)\Big\}.$$

Пусть $\mathcal{P}_n \overset{def}{=} \Big\{p_k(z)\Big\}_{k=1}^{n}$ и $\Gamma_n \overset{def}{=} \Big\{\gamma_k\Big\}_{k=1}^{n}$ — соответственно произвольные система линейно независимых функций из X и набор числовых коэффициентов. Сопоставляя вектору $\Im(f, \mathcal{M}_n)$ функцию

$$U\big(f; \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n, \Gamma_n, z\big) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \ \mu_k(f) \ p_k(z),$$

решают задачу восстановления f по информации $\Im$, позволяющую наилучшим образом приспособиться к рассматриваемому классу $\mathfrak{M}$. Величину

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X = \inf\Big\{\sup\Big\{\|f - U\big(f; \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n, \Gamma_n\big)\| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : \ \Gamma_n \in \mathbb{C}^n\Big\}$$

называют погрешностью восстановления на классе $\mathfrak{M}$ и полагают

$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X : \ \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n\Big\}$$

$$\Big(\text{или} \ \ \mathcal{K}_n^{\mathcal{P}rime}(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}'_n, \mathcal{P}_n)_X : \ \mathcal{M}'_n, \mathcal{P}_n\Big\}\Big),$$

где $\mathcal{M}'_n$ — набор заданных на X линейных ограниченных функционалов.

Метод восстановления $(\mathcal{M}_n^*, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*)$ $\big($или $\mathcal{M}_n^{*'}, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*\big)$, для которого

$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\Big\{\|f - U\big(f; \mathcal{M}_n^*, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*\big)\| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}$$

$$\left(\text{или } \ \mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\Big\{\|f - U\big(f; \mathcal{M}_n^{*'}, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*\big)\| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}\right),$$

называют оптимальным (или оптимальным линейным) методом восстановления функций из класса $\mathfrak{M}$. При этом справедливы соотношения [26]

$$\mathcal{K}_n'(\mathfrak{M}, X) = \delta_n(\mathfrak{M}, X),$$

$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) \geq d_n(\mathfrak{M}, X). \tag{32}$$

Если $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathfrak{M}} + L$, где $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — компакт, L — конечномерное подпространство, то в (32) имеет место знак равенства.

Параллельно с $\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X$ рассматривают также величину

$$\gamma(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n)_X \overset{def}{=} \sup\Big\{\|f_1 - f_2\| : \ f_1, f_2 \in \mathfrak{M}, \ \Im(f_1, \mathcal{M}_n) = \Im(f_2, \mathcal{M}_n)\Big\},$$

которую с помощью фиксированного набора функционалов $\mathcal{M}_n$ интерпретируют как погрешность метода кодирования на классе $\mathfrak{M}$. Полагая при этом

$$\gamma^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\gamma(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n)_X : \ \mathcal{M}_n\Big\},$$

получают

$$\gamma^n(\mathfrak{M}, X) \leq 2\mathcal{K}_n'(\mathfrak{M}, X).$$

Если множество $\mathfrak{M}$ центрально-симметрично и выпукло, то

$$\gamma^n(\mathfrak{M}, X) = 2\mathcal{K}_n'(\mathfrak{M}, X).$$

Результат, полученный в теореме 2.2.3, обеспечивает возможность сформулировать следующее утверждение в приведённых выше обозначениях.

Теорема 2.2.5. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$; $\mu \geq 1/2$, $0 < \rho \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ *и мажоранта* Φ *удовлетворяет ограничению (26). Тогда оптимальным линейным методом восстановления* $\big(\mathcal{M}_n^{*'}, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*\big)$ *функций* f

из класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ *в пространстве* $H_{q,\rho}$, $1\le q\le\infty$, $0<\rho\le 1$ *является линейный метод* $\Lambda_{n-1,r,\rho}(f,z)$, *определённый равенством (28), а наилучший метод кодирования определяется набором функционалов*

$$\mu_k(f)=c_k(f)=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

При этом

$$\gamma^n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_{q,\rho}\right)=2\mathcal{K}_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu),H_{q,\rho}\right)=$$

$$=2\mathcal{K}'_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu),H_{q,\rho}\right)=\frac{\pi\rho^n}{(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right).$$

Глава I

Наилучшие линейные методы приближения классов функций и значения n-поперечников, задаваемых модулями непрерывности в пространстве Харди H_q $(1 \leq q \leq \infty)$

В этой главе изучается экстремальная задача нахождения значений наилучших полиномиальных приближений аналитических в круге $|z| \leq 1$.

Следует отметить, что первый точный результат по решению экстремальной задачий о нахождении величины наилучшего полиномиального приближения аналитических функций в круге $|z| \leq 1$ с ограниченной в чебышёвской норме r-ой производной найден К.И.Бабенко [7]:

$$E_{n-1}(f)_C = E_{n-1}(f)_{H_\infty} := E(f, \mathcal{P}_{n-1})_{H_\infty} \leq$$
$$\leq \frac{1}{n(n-1)\dots(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f^{(r)}, \mathcal{P}_{n-1})_{H_\infty}, \ r \in \mathbb{N}.$$

Затем в 1967 г. для дробных производных этот результат был обобщён J.T.Scheick [4] и независимо от него В.И.Белым [8]:

$$E_{n-1}(f)_{H_\infty} \leq \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f^{(r)}, \mathcal{P}_{n-1})_{H_\infty}, \ r \in \mathbb{R}_+$$

В дальнейшем вопросами наилучшего полиномиального приближения и нахождения наилучших линейных методов приближения аналитических для некоторых классов функций с ограниченным по норме пространством H_q, $q \geq 1$ старшей производной или производной дробного порядка, в основном занимались В.М.Тихомиров [33], Л.В.Тайков [29–32] и М.З.Двейрин [22–24].

Затем в восьмидесятых годах указанная задача изучалась в серии работ S.D.Fisher [1], S.D.Fisher and C.A.Micchelli [2], М.З.Двейрина и И.В.Чебаненко [25], A.Pinkus [3], Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [6], Н.Айнуллоева [5], С.Б.Вакарчука [9–11] для классов функций, задаваемых модулями непрерывности и гладкости r-ой производной и вычислены также точные значения колмогоровских n-поперечников.

В опубликованных работах М.Ш.Шабозова с соавторами [35, 36, 40–43] решены задачи наилучшего полиномиального приближения для классов функций, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка r-ых производных, в пространстве H_2 найдены точные значения n-поперечников для указанных классов функций.

С.Б.Вакарчук [12–16] указал явный вид наилучших линейных методов приближения, реализующих точные значения линейных поперечников для классов функций, рассмотренных Л.В.Тайковым. В совместной работе С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [17] указаны наилучшие линейные методы и оптимальные подпространства, реализующие точные значения поперечников для классов аналитических функций в круге $R \geq 1$, определяемые модулями гладкости в $H_{q,R}$ $(1 \leq q \leq \infty)$, и в весовых пространствах Бергмана.

В данной диссертационной работе найдены наилучшие линейные методы приближения для других классов функций в более общем пространстве $H_{q,\rho}$ $(q \geq 1,\ 0 \leq \rho < 1)$ и с помощи этих методов вычисляются точные значения n-поперечников.

§1.1. Необходимые определения и обозначения

1.1.1. Предварительные факты

Всюду в дальнейшем придерживаемся следующих обозначениев: $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел вещественной оси, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество целых неотрицательных чисел, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Определение пространства Харди. Говорят, что аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \ z = \rho e^{it}, \ 0 < \rho \le 1, \ 0 \le t \le 2\pi \qquad (1.1.1)$$

принадлежит пространству Харди $H_q, \ 1 \le q \le \infty$, если

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \to 1-0} \{M_q(\rho, f)\} := \lim_{\rho \to 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q} :=$$

$$:= \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{it})|^q dt \right)^{1/q} := \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |F(t)|^q dt \right)^{1/q} < \infty, \qquad (1.1.2)$$

где

$$F(t) := f(e^{it}) = \lim_{\rho \to 1-0} f(\rho e^{it})$$

— угловое граничное значение $f(z)$ (см., например, [27], стр. 192).

При $q = \infty$ дополнительно будем предполагать функции $f \in \mathcal{A}(U)$ в замкнутом круге $\overline{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$, которые непрерывны вплоть до границы с нормой

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{H_\infty} = \max\{|f(z)| : |z| \le 1\} = \max\left\{|f(e^{it})| : 0 \le t \le 2\pi\right\}.$$

Через $f_a^{(r)}(z) = \dfrac{\partial^r f(\rho e^{it})}{\partial t^r}$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ f_a^{(0)}(z) \equiv f(z))$ обозначим r-ю производную функции $f(z) \in \mathcal{A}(U)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho e^{it}$, то есть положим

$$f_a'(z) := \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = f'(z)zi,$$

$$f_a^{(r)}(z) = \left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a',\ r \geq 2, r \in \mathbb{N},$$

а через $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$ обозначим обычную r-ю производную функции $f(z)$.

Символом $F_a^{(r)}(t)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ F_a^{(0)}(t) \equiv F(t))$ будем обозначать граничные значения аналитической функции $\partial^r f/\partial t^r \overset{def}{=} \partial^r f(\rho e^{it})/\partial t^r,\ r \in \mathbb{Z}_+$, а символом $F^{(r)}(t)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ F^{(0)}(t) \equiv F(t))$ — граничные значения аналитической функции $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$.

Так как

$$\frac{\partial^r f(\rho e^{it})}{\partial t^r} = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^r c_k \rho^k e^{ikt},\ r \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.1.3}$$

$$\frac{d^r f(z)}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\dots(k-r+1) \cdot c_k z^{k-r},\ r \in \mathbb{N}, \tag{1.1.4}$$

то из равенств (1.1.3) и (1.1.4) очевидным образом следует, что для соответствующих граничных значений производных имеем:

$$F_a^{(r)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^r c_k e^{ikt}, \tag{1.1.5}$$

$$F^{(r)}(t) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)...(k-r+1) \cdot c_k e^{i(k-r)t}. \tag{1.1.6}$$

Всюду в дальнейшем, ради удобства, вводим обозначение

$$\alpha_{n,r} = n(n-1)...(n-r+1),\ n \geq r,\ \ n, r \in \mathbb{N}.$$

Через H_q^r $(r \in \mathbb{Z}_+,\ H_q^0 = H_q),\ 1 \le q \le \infty$ обозначим множество аналитических в единичном круге $|z| \le 1$ функций $f(z) \in H_q,\ 1 \le q \le \infty$, у которых $f^{(r)}(z) \in H_q$, то есть

$$H_q^r = \left\{ f(z) \in H_q : \ \left\| f^{(r)} \right\|_{H_q} < \infty \right\},\ 1 \le q \le \infty.$$

Аналогично полагаем:

$$H_{q,a}^r = \left\{ f(z) \in H_q : \ \left\| f_a^{(r)} \right\|_{H_q} < \infty \right\},\ 1 \le q \le \infty.$$

В дальнейшем условимся, что когда мы пишем

$$f(z) \in \ H_q^r \ \left(\text{или } f^{(r)}(z) \in H_{q,a}^r\right),\ 1 \le q \le \infty,$$

мы имеем ввиду, что производная

$$f^{(r)}(z) \in H_q \ \left(\text{или } f_a^{(r)}(z) \in H_q\right),\ 1 \le q \le \infty$$

имеет r-ю производную граничной функции

$$F^{(r)}(t) \in L_p[0, 2\pi] \ \left(F_a^{(r)}(t) \in L_p[0, 2\pi]\right),\ 1 \le p \le \infty.$$

Так, например, для функции $f_1(z) := z^n$ всюду далее запишем

$$f_{1,a}^{(r)}(z) = (in)^r \cdot z^n \text{ и } F_{1,a}^{(r)}(t) = (in)^r \cdot e^{int},$$

причём $F_{1,a}^{(r)}(t) \in L_p[0, 2\pi],\ 1 \le p \le \infty$, а также, что $f^{(r)}(z) = \alpha_{n,r} z^{n-r}$ и

$$F^{(r)}(t) = \alpha_{n,r} e^{i(n-r)t} \in L_p[0, 2\pi] \ (1 \le p \le \infty,\ n > r,\ n, r \in \mathbb{N}).$$

1.1.2. Модули непрерывности в пространстве Харди H_q. Примеры экстремальных функций

В этом подпункте мы дадим описание модулей непрерывности. Если функция $f(z) \in H_q,\ 1 \le q \le \infty$ имеет непрерывные граничные значения, то их гладкость охарактеризуем модулем непрерывности

$$\omega(F,t)_q := \omega(F,t)_{H_q} = \sup\left\{\|f(e^{i(\cdot+h)}) - f(e^{i(\cdot)})\|_q : |h| \le t\right\} :=$$

$$= \sup\left\{\|F(\cdot+h) - F(\cdot)\|_q : |h| \le t\right\} \qquad (1.1.7)$$

или модулем гладкости её граничных значений

$$\omega_2(F,2t)_q := \omega_2(F,2t)_{H_q} =$$

$$= \sup\left\{\left\|f(e^{i(\cdot+h)}) - 2f(e^{i(\cdot)}) + f(e^{i(\cdot-h)})\right\|_q : |h| \le t\right\} =$$

$$= \sup\left\{\|F(\cdot+h)) - 2F(\cdot) + F(\cdot-h)\|_{H_q} : |h| \le t\right\} \qquad (1.1.8)$$

при $t \to 0$, либо задать скорость убывания посредством мажоранты некоторой усреднённой величины, содержащей (1.1.7) или (1.1.8).

В общем случае гладкость граничных значений $F(t) \in L_p[0,2\pi]$ охарактеризуем скоростью стремления к нулю модулем непрерывности m-го порядка, определяемое равенством

$$\omega_m(F;t)_2 = \sup\left\{\|\triangle_m^h F(\cdot)\|_2 : |h| \le t\right\}, \qquad (1.1.9)$$

где

$$\triangle_m^h F(u) = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} F(u+(m-l)h) \qquad (1.1.10)$$

— разность m-го порядка функции $F(u)$ с шагом h.

Очевидно, что если $f(z) \in H_2^{(r)} \cap H_{2,a}^{(r)}, r \in \mathbb{Z}_+$ то с учётом равенств (1.1.5) и (1.1.6) после некоторых простых вычислений будем иметь

$$\triangle_m^h\left(F_a^{(r)};u\right) = \triangle_m^h\left(\sum_{k=1}^{\infty}(ik)^r c_k e^{ikt};u\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(ik)^r c_k(f)\triangle_m^h\left(e^{ikt};u\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(ik)^r c_k(f)\left\{\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{l}e^{ik(u+(m-l)h)}\right\} =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(ik)^r c_k e^{iku}\left(1-e^{ikh}\right)^m, \tag{1.1.11}$$

$$\triangle_m^h\left(F^{(r)};u\right)=\triangle_m^h\left(\sum_{k=r+1}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k(f)e^{i(k-r)t};u\right)=$$

$$=\sum_{k=r+1}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k(f)\triangle_m^h\left(e^{i(k-r)t};u\right)=$$

$$=\sum_{k=r+1}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k(f)\left\{\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{l}e^{i(k-r)(u+(m-l)h)}\right\}=$$

$$=\sum_{k=r+1}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k e^{i(k-r)u}\left(1-e^{i(k-r)h}\right)^m. \tag{1.1.12}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая элементарная

Лемма 1.1.1. *Для произвольной функции* $f(z)\in H_2^{(r)}\cap H_{2,a}^{(r)}$ $(r\in\mathbb{Z}_+)$ *спроведливы равенства*

$$\omega_m^2\left(F_a^{(r)},t\right)_2=2^m\cdot\sup_{|h|\le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\cdot|c_k|^2\cdot(1-\cos kh)^m\right\}, \tag{1.1.13}$$

$$\omega_m^2\left(F^{(r)},t\right)_2=2^m\cdot\sup_{|h|\le t}\left\{\sum_{k=r+1}^{\infty}\alpha_{k,r}^2\cdot|c_k|^2\cdot(1-\cos(k-r)h)^m\right\}. \tag{1.1.14}$$

Доказательство. Докажем, например, равенство (1.1.13). Пользуясь соотношением (1.1.11) и равенством Парсеваля, запишем

$$\left\|\triangle_m^h\left(F_a^{(r)};\cdot\right)\right\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\triangle_m^h\left(F_a^{(r)};u\right)\right|^2du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}(ik)^r c_k(f)e^{iku}\left(1-e^{ikh}\right)^m\right|^2du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(ik)^r c_k(f)e^{iku}\left(1-e^{ikh}\right)^m\sum_{l=1}^{\infty}\overline{(il)^r c_l(f)}e^{-ilu}\left(1-e^{-ilh}\right)^m du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}|c_k(f)|^2\left|1-e^{ikh}\right|^{2m}du=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}|c_k(f)|^2\left|(1-\cos kh)-i\sin kh\right|^{2m}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}|c_k(f)|^2\left((1-\cos kh)^2+\sin^2 kh\right)^m=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}|c_k(f)|^2\left[2(1-\cos kh)\right]^m=2^m\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}|c_k(f)|^2\left(1-\cos kh\right)^m,$$

откуда сразу следует равенство (1.1.13).

Выполнив аналогичные вычисления, приходим к равенству

$$\left\|\triangle_m^h\left(F^{(r)};\cdot\right)\right\|_2^2=2^m\cdot\sum_{k=r+1}^{\infty}\alpha_{k,r}^2|c_k(f)|^2\left(1-\cos{(k-r)h}\right)^m.$$

Из последнего равенства получаем (1.1.14), чем и завершаем доказательство леммы 1.1.1.

Для решении ряд экстремальных задач, во всех основных результатах диссертации, выступает экстремальная функция

$$f_1(z)=z^n\in H_2^{(r)}\cap H_{2,a}^{(r)},\ r\in\mathbb{Z}_+.$$

1.1.3. Наилучшие приближения в H_q

Пусть

$$\mathcal{P}_{n-1}=\left\{p_{n-1}(z):p_{n-1}(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k,\ a_k\in\mathbb{C},\ |a_{n-1}|\neq 0\right\}$$

подпространство алгебраических комплексных полиномов степени $\le n-1$.

Хорошо известно [28, с.288-290], что среди всех полиномов $p_{n-1}(z)\in\mathcal{P}_{n-1}$ точную нижнюю грань в соотношение

$$E_n(f)_2\overset{def}{=}E(f,\mathcal{P}_{n-1})_2=\inf\{\|f-p_{n-1}\|_2:\ p_{n-1}(z)\in\mathcal{P}_{n-1}\}$$

для функции $f(z) \in H_q$ $(1 \le q \le \infty)$ реализует частная сумма Тейлора

$$T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

разложения $f(z)$ в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k + \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) z^k \equiv T_{n-1}(f, z) + \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) z^k$$

в круге $|z| < 1$. При этом, воспользуясь равенством Парсеваля, получим

$$E_{n-1}^2(f)_2 := E_n^2(f)_{H_2} = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{H_2}^2 : \ p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1}\} =$$

$$= \|f - T_{n-1}(f)\|_2^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2. \qquad (1.1.15)$$

Заметим также, что с другой стороны

$$\|f - T_{n-1}(f)\|_{H_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it}) - T_{n-1}(f, e^{it})|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(e^{it}) - T_{n-1}(f, e^{it})\right) \left(\overline{f(e^{it})} - \overline{T_{n-1}}(f, e^{it})\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right|^2 dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|T_{n-1}(f, e^{it})\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(t)|^2 dt - \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} |c_k(f)|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 = E_{n-1}(f)_{H_2}.$$

Аналогичным образом из равенств (1.1.5) и (1.1.6) непосредственным вычислением для функции $f(z) \in H_2^{(r)} \cap H_{2,a}^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$ получаем

$$E_{n-1}^2(f_a^{(r)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} |c_k|^2, \qquad (1.1.16)$$

$$E_{n-1}^2(f^{(r)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k|^2. \qquad (1.1.17)$$

Воспользуясь соотношениями (1.1.15)-(1.1.17) для наилучшего полиномиального приближения функции $f(z) \in H_2^{(r)} \cap H_{2,a}^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$ легко доказать:

$$E_{n-1}(f)_2 \leq n^{-r} E_{n-1}(f_a^{(r)})_2, \tag{1.1.18}$$

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \alpha_{n,r}^{-1} E_{n-1}(f^{(r)})_2. \tag{1.1.19}$$

Докажем неравенство (1.1.18). Воспользуясь равенствами (1.1.15) и (1.1.16), имеем:

$$E_{n-1}^2(f)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 |c_k|^2 = n^{-2r} \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} |c_k|^2 = n^{-2r} E_{n-1}^2(f_a^{(r)})_2.$$

Этим же путем с привлечением (1.1.17) доказывается неравенство (1.1.19). Оба неравенства (1.1.18) и (1.1.19) для $f_1(z) = z^n \in H_2^{(r)} \cap H_{2,a}^{(r)}$ обращаются в равенство.

§1.2. Наилучшие линейные методы приближения и значения n-поперечников класса $W^{(r)}H_q\,(\Phi;\omega)$

В последние два десятилетия найден ряд наилучших линейных методов приближения в различных банаховых пространствах аналитических функций (см., например, [3, 12–17, 25, 39]). В этом параграфе найден наилучший линейный метод приближения классов функций типа Л.В.Тайкова [32] и вычислены точные значения ряда n-поперечников для указанного класса.

Пусть $\Phi(x)$ $(x \geq 0)$ — произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Используя функцию $\Phi(x)$ в качестве мажоранты, рассмотрим следующий класс функций:

$$W^{(r)}H_q(\Phi;\omega) = \left\{ f \in H_q^{(r)} :\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(f^{(r)}; 2t)_q\, dt \leq \Phi(h),\ h \in (0, \pi/2] \right\}.$$

Приведём необходимые для дальнейшего определения и обозначения.

Пусть X — банахово пространство; S — единичный шар в нём; $\mathfrak{M}$ — некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X; $L_n \subset X$ — n-мерное линейное подпространство; $L^n \subset X$ — линейное подпространство коразмерности n; $\mathscr{L}(X, L_n) := \{\Lambda : X \to L_n\}$ — множество линейных непрерывных операторов $\{\Lambda\}$, отображающих пространство X в L_n.

Равенством

$$E(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup\Big\{ \inf\big\{ \|f - \varphi\|_X :\ \varphi \in L_n \big\} : f \in \mathfrak{M} \Big\} \tag{1.2.1}$$

соответственно обозначим наилучшее приближение элемента $f \in X$ и фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ фиксированным подпространством $L_n \subset X$.

Величина

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X = \inf\Big\{ \sup\big\{ ||f - \Lambda(f, L_n)||_X : f \in \mathfrak{M} \big\} : \Lambda \subset \mathscr{L}(X, L_n) \Big\} \tag{1.2.2}$$

характеризует наилучшее линейное приближение $\mathfrak{M}$ элементами $L_n \subset X$. Линейный оператор $\Lambda^* = \Lambda^*(f, L_n) \subset (X, L_n)$, реализующий в (1.2.2) точную нижнюю грань, является наилучшим для $\mathfrak{M} \subset X$ линейным методом приближения. Согласно определению, для величины (1.2.1) и (1.2.2), выполняется неравенства

$$E(\mathfrak{M}, L_n)_X \le \mathscr{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X.$$

Величины

$$b_n(\mathfrak{M}; X) = \sup\Big\{ \sup\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : L_{n+1} \subset X\Big\}, \qquad (1.2.3)$$

$$d_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\Big\{E(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X\Big\}, \qquad (1.2.4)$$

$$d^n(\mathfrak{M}; X) = \inf\Big\{ \sup\{\|f\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \cap L^n\} : L^n \subset X\Big\}, \qquad (1.2.5)$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\Big\{ \inf\{\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \Lambda, L_n)_X : \ \Lambda \subset \mathscr{L}(X, L_n)\} : L_n \subset X\Big\} \qquad (1.2.6)$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским и линейным* n-поперечниками. Перечисленные аппроксимативные характеристики монотонны по n и между ними имеют место неравенства [3, 34]:

$$b_n(\mathfrak{M}; X) \le \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M}; X) \\ \\ d^n(\mathfrak{M}; X) \end{matrix} \le \delta_n(\mathfrak{M}; X). \qquad (1.2.7)$$

Если существует подпространство $L^*_{n+1} \subset X$ размерности $n+1$, для которого достигается внешняя верхняя грань в (1.2.3), то оно называется экстремальным для n-поперечника Бернштейна $b_n(\mathfrak{M}; X)$.

Если существует подпространство $L^*_n \subset X$ размерности n, на котором достигается нижняя грань в (1.2.4), то такое подпространство называют экстремальным для колмогоровского n-поперечника $d_n(\mathfrak{M}; X)$. Тогда

$$d_n(\mathfrak{M}; X) = E(\mathfrak{M}, L^*_n)_X.$$

Если существует подпространство $L_*^n \subset X$ коразмерности n, на котором достигается нижняя грань в (1.2.5), то такое подпространство называют экстремальным для гельфандовского n-поперечника $d^n(\mathfrak{M}; X)$. Тогда

$$d^n(\mathfrak{M}; X) = \sup\{\|f\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \cap L_*^n\}.$$

Если существует линейный оператор $\Lambda^* : \ X \to L_n^*$, на котором достигается внешняя нижняя грань в (1.2.6), то такое оператор называют наилучшим линейным методом приближения $\mathfrak{M}$ в пространстве X, а L_n^* — экстремальным подпрострaством для линейного n-поперечника (1.2.6). При этом

$$\delta_n(\mathfrak{M}; X) = \mathscr{E}(\mathfrak{M}, L_n^*)_X.$$

Из результата работы Л.В.Тайкова [32] следует, что если для любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r \geq 1$, функция $\Phi(h)$ при любом $h \in (0, \pi/2]$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2(n-r))} \geq \frac{\pi}{2(n-r)h} \int\limits_0^{(n-r)h} (\sin t)_* \, dt, \tag{1.2.8}$$

где

$$(\sin t)_* := \Big\{\sin t, \ \text{если} \ \ 0 < t \leq \pi/2; \ \ 1, \ \text{если} \ \ t \geq \pi/2\Big\},$$

то имеют место равенства

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi; \omega); H_q\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi; \omega); H_q\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4\alpha_{n,r}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \tag{1.2.9}$$

Например, функция $\Phi_*(u) = u^{\pi/2-1}$ удовлетворяет условия (1.2.8).

Через $H_{q,\rho}$ $(0 < \rho \leq 1, \ H_{q,1} \equiv H_q)$ обозначим банаховое пространство Харди функций $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$ в круге $|z| < \rho$, для которых имеет место

$$\|f(\cdot)\|_{q,\rho} := \|f(\cdot)\|_{H_{q,\rho}} = \|f(\rho\cdot)\|_q < \infty.$$

Отметим, что на основе соображений, изложенных в работе С.Б.Вакарчука [12, с.32], результат (1.2.9) распространяется на пространство $H_{q,\rho}$ $(1 \leq q \leq \infty,\ 0 < \rho \leq 1)$ и мы получим

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);H_{q,\rho}\right)=d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);H_{q,\rho}\right)=$$

$$=\frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (1.2.10)$$

Наша цель состоит в распространении результата (1.2.10) для линейных и гельфандовских n-поперечников. Для этого построим наилучшие линейные методы для класса функций $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$.

С этой целью для произвольной функции $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(f)z^k\in\mathcal{A}(U)$, следуя работе С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [17], запишем линейный полиномиальный оператор:

$$\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;z)\overset{def}{=}\sum_{k=0}^{r-1}c_k(f)z^k+$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\alpha_{k,r}\rho^{2(n-k)}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k(f)z^k, \qquad (1.2.11)$$

где $n>r$ и числа $\gamma_{k,r}$ определены равенством

$$\gamma_{k,r}=(n-r)\int\limits_0^{\pi/(2(n-r))}\cos(k-r)t\cos(n-r)tdt,\ k\geq r,\ k\in\mathbb{N}.$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.2.1. *Пусть f — произвольная аналитическая функция из класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$, $1\leq q\leq\infty$, n,r — любые натуральные числа, $n>r$ и $0<\rho\leq 1$. Тогда*

$$\left\|f-\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\rho}}\leq\frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (1.2.12)$$

Если мажорирующая функция $\Phi(h)$ при любом $h \in (0, \pi/2]$ удовлетворяет условию (1.2.8), то неравенство (1.2.12) является точным в том смысле, что существует функция $f_1 \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \le q \le \infty)$, для которой неравенство (1.2.12) обращается в равенство.

Доказательство. Доказательство теоремы основывается на следующем неравенстве

$$\left\|f - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\rho^n(n-r)}{2\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega(f^{(r)};2t)_q dt, \tag{1.2.13}$$

которое получается буквальным повторением схемы рассуждений в доказательстве теоремы 1 работы С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [17].

Из правой части неравенства (1.2.13), с учётом определения класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$, запишем

$$\frac{\rho^n(n-r)}{2\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega(f^{(r)};2t)_q dt \le$$

$$\le \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}} \left(\frac{2(n-r)}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega(f^{(r)};2t)_q dt \right) \le \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \tag{1.2.14}$$

Таким образом, из (1.2.13) и (1.2.14) получаем

$$\left\|f - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \tag{1.2.15}$$

или что то же

$$\mathscr{E}_{n-1}(f, \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f))_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \tag{1.2.15$'$}$$

Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \frac{\pi}{4\alpha_{n,r}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) z^n,$$

для которой неравенство (1.2.15) обращается в равенство и $\Phi(h)$ удовлетворяет условию (1.2.8). Непосредственным вычислением легко проверить, что $f_1 \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$, причём для этой функции в силу равенства

$$\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;z) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\rho^{2(n-k)}\left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k(f)z^k,$$

где $n > r$ и числа $\gamma_{k,r}$ определены равенством

$$\gamma_{k,r} = (n-r)\int\limits_0^{\pi/(2(n-r))}\cos(k-r)t\cos(n-r)tdt,\ k \geq r,\ k \in \mathbb{N},$$

имеем $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f_1;z) \equiv 0$, а потому

$$\|f_1 - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f_1)\|_{H_{q,\rho}} = \|f_1\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

откуда и следует утверждение теоремы 1.2.1.

С помощью результа теоремы 1.2.1, сформулируем основной результат данного параграфа.

Теорема 1.2.2. *Пусть мажоранта $\Phi(h)$ при любом $h \in (0,\pi/2]$ удовлетворяет условию (1.2.8) и пусть $\pi_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$. Тогда для всех $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ справедливы равенства*

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);H_{q,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);\Lambda_{n-1,r-1,\rho}\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (1.2.16)$$

Доказательство. Для произвольного функция $f(z) \in H_q, 1 \leq q \leq \infty$ справедливо неравенство [12]:

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}} \leq \rho^n E_{n-1}(f)_{H_q} \leq \rho^n \mathscr{E}_{n-1}(f)_{H_q}\ (1 \leq q \leq \infty,\ 0 < \rho \leq 1), \quad (1.2.17)$$

то переходя к верхней грани по всем функциями $f(z) \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$, из (1.2.17) получаем

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)\right)_{H_{q,\rho}} \leq \rho^n E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)\right)_q \leq$$

$$\leq \rho^n \mathscr{E}_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)\right)_q \leq \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right), \qquad (1.2.18)$$

в силу неравенств (1.2.7) и (1.2.18) для всех n-поперечников имеем

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);H_{q,\rho}\right) \leq b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);H_{q,\rho}\right) \leq$$

$$\leq d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);H_{q,\rho}\right) \leq E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)\right)_{H_{q,\rho}} \leq$$

$$\leq \mathscr{E}_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)\right)_{H_{q,\rho}} \leq \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{nr}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (1.2.19)$$

Из неравенств (1.2.19) и (1.2.7) вытекает, что

$$d^n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);H_{q,\rho}\right) \leq \delta_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);H_{q,\rho}\right) \leq$$

$$\leq \mathscr{E}_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)\right)_{H_{q,\rho}} \leq \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{nr}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

а потому получаем оценку сверху для указанных n-поперечников

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);H_{q,\rho}\right) \leq \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{nr}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (1.2.20)$$

Для получения оценки снизу во множестве $\mathcal{P}_n \cap H_{q,\rho}$, рассмотрим $(n+1)$-мерную шар полиномов

$$S^*_{n+1} := \left\{p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{q,\rho} \leq \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\right\}$$

и докажем включение $S^*_{n+1} \subset W^r H_q(\Phi)$.

Нам понадобится элементарная

Лемма 1.2.1. *Для произвольного полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ справедливо*

$$\omega\left(p_n^{(r)}, 2t\right)_q \leq 2(\sin(n-r)t)_* \cdot \alpha_{n,r} \cdot \|p_n\|_q. \qquad (1.2.21)$$

Доказательство. Для полинома $p_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C}$ из подпространства $\mathcal{P}_n$, с учётом производной r-го порядка $p_n^{(r)}(z) = \sum\limits_{k=r}^{n} \alpha_{k,r} a_k z^{k-r}$ запишем соотношение

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \left| p_n^{(r)}(\rho e^{i(t+h)}) - p_n^{(r)}(\rho e^{it}) \right|^q dt \right\}^{1/q} \leq$$

$$\leq 2 \left(\sin \frac{(n-r)t}{2} \right)_* \left\{ \int_0^{2\pi} \left| p_n^{(r)}(\rho e^{it}) \right|^q dt \right\}^{1/q},\ 0 < \rho \leq 1.$$

Полученное неравенство запишем в виде

$$\left\| p_n^{(r)}(\rho e^{i(\cdot+h)}) - p_n^{(r)}(\rho e^{i(\cdot)}) \right\|_q \leq 2 \left(\sin \frac{(n-r)h}{2} \right)_* \left\| p_n^{(r)}(\rho e^{i(\cdot)}) \right\|_q. \qquad (1.2.22)$$

Пользуясь неравенством типа С.Н.Бернштейна

$$\left\| p_n^{(r)} \right\|_q \leq \alpha_{n,r} \| p_n \|_q,$$

доказанного Л.В.Тайковым [32], неравенство (1.2.22) принимает вид

$$\left\| p_n^{(r)}(\rho e^{i(\cdot+h)}) - p_n^{(r)}(\rho e^{i(\cdot)}) \right\|_q \leq 2 \left(\sin \frac{(n-r)h}{2} \right)_* \alpha_{n,r} \left\| p_n(\rho e^{i(\cdot)}) \right\|_q.$$

Отсюда при $\rho \to 1 - 0$ и определения пространства H_q $(1 \leq q \leq \infty)$ сразу следует, что

$$\omega(p_n^{(r)}, t)_q \leq 2 \left(\sin \frac{(n-r)t}{2} \right)_* \alpha_{n,r} \| p_n \|_q$$

или что то же

$$\omega(p_n^{(r)}, 2t)_q \leq 2(sin(n-r)t)_* \alpha_{n,r} \| p_n \|_q,$$

откуда и следует утверждение леммы 1.2.1.

Продолжим доказательство теоремы 1.2.2.

Далее, воспользуясь известным неравенством

$$\|p_n\|_q \le \rho^{-n}\|p_n\|_{q,\rho} \ (1 \le q \le \infty, \ 0 < \rho < 1),$$

доказанного Е.Хиллом, Г.Сегё, Я.Д.Тамаркиным (см. например, работу С.Б.Вакарчука [12, с.32]), неравенство (1.2.21) из леммы 1.2.1 запишем в виде

$$\omega(p_n^{(r)}, 2t)_q \le 2(sin(n-r)t)_* \alpha_{n,r}\rho^{-n}\|p_n\|_{q,\rho}. \tag{1.2.23}$$

Для произвольного полинома $p_n \in S_{n+1}^*$ и любых $n, r \in \mathbb{N}, \ n > r$ и $0 < h \le \pi/2$ из (1.2.23), с учётом ограничения

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2(n-r))} \ge \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 (\sin(n-r)ht)_*\,dt, \tag{1.2.24}$$

получаем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(p_n^{(r)}, 2t)_q dt \le 2\alpha_{n,r}\rho^{-n}\|p_n\|_{q,\rho} \cdot \int\limits_0^1 (sin(n-r)t)_* dt \le$$

$$\le \frac{\pi}{2}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \cdot \int\limits_0^1 (sin(n-r)ht)_* dt \le \Phi(h).$$

Из этого следует, что $S_{n+1}^* \subset W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$, а потому, согласно соотношениям (1.2.7) между n-поперечниками и определения бернштейновского n-поперечника, имеем оценку снизу

$$d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_{q,\rho}\right) \ge b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_{q,\rho}\right) \ge$$

$$\ge b_n\left(S_{n+1}^*; H_{q,\rho}\right) \ge \pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_{q,\rho}\right) \ge$$

$$\ge \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \tag{1.2.25}$$

Сопоставляя неравенств (1.2.20) и (1.2.25), получаем (1.2.16), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.2.

§1.3. Наилучшие линейные методы приближения и значения ряда n-поперечников класса $W^{(r)}H_q\,(\Phi;\omega,\mu)$

В этом параграфе построены наилучшие линейные методы приближения классов функций, принадлежащих пространству H_q, $1\le q\le\infty$, усреднённые модули непрерывности граничных значений производных $f^{(r)}(z)$, которых мажорируются функцией Φ и вычислены точные значения различных n-поперечников.

Пусть $\Phi(x)$ $(x\ge 0)$ — произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0)=0$. Используя $\Phi(x)$ в качестве мажоранты, рассмотрим следующий класс функций:

$$W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)=\left\{f\in H_q^{(r)}:\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega(f^{(r)};2t)_q\left[1+(\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2h}\right]dt\le\Phi(h)\right\},$$

где $h\in(0,\pi/2]$, $r\in\mathbb{N}$, $1\le q\le\infty$ и $\mu\ge 1$ — произвольное фиксированное число.

Из основного результата работы Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [6] после некоторых простых вычислений следует, что для произвольной функции $f\in H_q^{(r)}$, при любом $\mu\ge 1$ выполняется неравенство

$$E_{n-1}(f)_q\le\frac{n-r}{2\alpha_{n,r}}\int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)}\omega(f^{(r)},2t)_q\big\{1+(\mu^2-1)sin\mu(n-r)t\big\}dt. \quad (1.3.1)$$

Для произвольной функции $f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$, учитывая определение класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$, из неравенства (1.3.1) получаем

$$E_{n-1}(f)_q\le\frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}}\left(\frac{2\mu(n-r)}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)}\omega(f^{(r)},2t)_q\big\{1+(\mu^2-1)sin\mu(n-r)t\big\}dt\right)\le$$

$$\leq \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right),\ 1 \leq \mu < \infty,\ n,r \in \mathbb{N},\ n > r,\ 1 \leq q \leq \infty,$$

откуда следует оценка сверху

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_q = \sup\left\{E_{n-1}(f)_q : f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\} \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{1.3.2}$$

Неравенством (1.3.2) пользуемся при оценке сверху n-поперечников.

Теорема 1.3.1. *Если при заданном* $\mu \geq 1$ *и при любых* $n, r \in \mathbb{N},\ n > r$, $h \in (0, \pi/2]$ *мажоранта* $\Phi(h)$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2\mu(n-r))} \geq \frac{\pi}{2\mu}\int\limits_0^1 (\sin(n-r)ht)_* \left[1 + (\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2}\right]\, dt, \tag{1.3.3}$$

то при любых $r \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_q\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_q\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_{H_q} = \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \tag{1.3.4}$$

где $b_n(\cdot)$ *— n-поперечник Бернштейна,* $d_n(\cdot)$ *— n-поперечник Колмогорова,*

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_{H_q} := \sup\left\{E_{n-1}(f)_{H_q} : f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\}$$

и $\alpha_{n,r} := n(n-1)...(n-r+1),\ n \geq r$. *Множество мажорант* $\{\Phi\}$*, удовлетворяющих условию (1.3.3), не пусто. Этому условию удовлетворяет, например, мажоранта* $\Phi_*(u) = u^{\alpha(\mu)}$*, где*

$$\alpha(\mu) = \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2 \int\limits_0^1 tcos\frac{\pi t}{2\mu}\left[1 + (\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2}\right]\, dt$$

и, в частности,

$$\alpha(1) = \frac{\pi}{2} - 1, \lim_{\mu\to\infty} \alpha(\mu) = 1,$$

причём для всех $\mu \in [1, \infty)$ *выполняется неравенство* $(\pi/2) - 1 \leq \alpha(\mu) \leq 1$.

Доказательство. Оценка сверху следует из неравенства (1.3.2), с учетом соотношения (1.2.28), поскольку

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_q\right)\leq d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_q\right)\leq$$

$$\leq E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_q\leq$$

$$\leq\frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right),\ n>r,\ n,r\in\mathbb{N}. \tag{1.3.5}$$

Для получения оценки снизу во множестве $\mathcal{P}_n\cap H_q$, введём в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$S_{n+1}:=\left\{p_n\in\mathcal{P}_n:\|p_n\|_q\leq\frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}}\ \cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right)\right\},$$

и докажем включение $S_{n+1}\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$. Из леммы 1.2.1 предыдущего параграфа воспользуемся неравенством (1.2.21), где доказано, что для произвольного алгебраического комплексного полинома $p_n\in\mathcal{P}_n$ справедливо неравенство

$$\omega(p_n^{(r)},2t)_q\leq 2(sin(n-r)t)_*\alpha_{n,r}\|p_n\|_q. \tag{1.3.6}$$

Умножим на весовую функцию $h^{-1}[1+(\mu^2-1)sin\dfrac{\pi t}{2h}]$ неравенство (1.3.6) и проинтегрируем в пределах от $t=0$ до $t=h$ по переменной t, затем заменим норму полинома радиусом шара и положим $t=rh$. С учётом условий (1.3.3) и после выполнения всех преобразований, приходим к неравенству

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega(p_n^{(r)},2t)_q\left\{1+(\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2h}\right\}dt\leq$$

$$\leq 2\alpha_{n,r}\|p_n\|_q\cdot\frac{1}{h}\int\limits_0^h(sin(n-r)t)_*\left\{1+(\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2h}\right\}dt=$$

$$=\frac{\pi}{2\mu}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right)\cdot\int\limits_0^1(sin(n-r)ht)_*\left\{1+(\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2}\right\}dt\leq\Phi(h),$$

что равносильно выполнению включения $S_{n+1} \subset W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$. Отсюда, согласно определению бернштейновского n-поперечника, получаем оценки снизу

$$d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_q\right) \geq$$

$$\geq b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_q\right) \geq b_n\left(S_{n+1};H_q\right)$$

$$\geq \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{1.3.7}$$

Сопоставляя оценки (1.3.5) и (1.3.7) получаем требуемые равенства (1.3.4).

Анализируем условие (1.3.3) и найдём значения $\alpha = \alpha(\mu)$ $(1 \leq \mu < \infty)$, при которых функция $\Phi_*(u) = u^\alpha$ удовлетворяет указанным условиям. Подставляя функция Φ_* в (1.3.3), получаем

$$\left(\frac{2\mu(n-r)h}{\pi}\right)^\alpha \geq \frac{\pi}{2\mu}\cdot\int\limits_0^1 (sin(n-r)ht)_*\cdot\{1+(\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2}\}dt.$$

Полученное неравенство пишем в виде

$$\left(\frac{2\mu(n-r)h}{\pi}\right)^{\alpha+1} \geq$$

$$\geq (n-r)h\int\limits_0^1 (sin(n-r)ht)_*\cdot\{1+(\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2}\}dt. \tag{1.3.8}$$

Неравенство (1.3.8) при всех заданных $\mu \in [1,\infty)$ для

$$\alpha(\mu)+1 \overset{def}{=} \beta(\mu) = 1+\left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2\cdot\int\limits_0^1 tcos\frac{\pi t}{2\mu}\left[1+(\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2}\right]dt$$

доказано в работе Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [6, с.346], а значит в нашем случае неравенство (1.3.8) имеет место для

$$\alpha \overset{def}{=} \alpha(\mu) = \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2\cdot\int\limits_0^1 tcos\frac{\pi t}{2\mu}\left[1+(\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2}\right]dt. \tag{1.3.9}$$

Из равенства (1.3.9), в частности, следует, что

$$\alpha(1) = \frac{\pi}{2} - 1, \lim_{\mu\to\infty} \alpha(\mu) = 1$$

и для всех $\mu \in [1, \infty)$ имеем $\dfrac{\pi}{2} - 1 \leq \alpha(\mu) \leq 1$, завершаем с этим доказательство теоремы 1.3.1.

Используя неравенство ([34], с.49)

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}} \leq \rho^n E_{n-1}(f)_{H_q},\ 1 \leq q \leq \infty,\ 0 < \rho \leq 1 \tag{1.3.10}$$

и определение бернштейновского n-поперечника, распространяем результат (1.3.4) теоремы 1.3.1 на пространство $H_{q,\rho}$ $(0 < \rho \leq 1, 1 \leq q \leq \infty)$.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ *и мажоранта* $\Phi(h)$ *удовлетворяет условию (1.3.3) при любом* $h \in (0, \pi/2]$. *Тогда при всех* $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$ *и* $\mu \geq 1$ *имеют место равенства*

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{1.3.11}$$

Доказательство. По всем функциями $f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$, переходя к верхней грани, в неравенстве (1.3.10) получаем

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_{H_{q,\rho}} \leq \rho^n E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_{H_q} \leq$$

$$\leq \frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right),$$

откуда и следует оценка сверху в (1.3.11):

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right) \leq d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{nr}} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{1.3.12}$$

Введём в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$S_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu\alpha(n-r)}\right)\right\}$$

во множестве $\mathcal{P}_n \cap H_{q,\,\rho}$ для получения оценки снизу и докажем включение $S_{n+1} \subset W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$. Для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ выполняется неравенство (см. стр. 41)

$$\|p_n\|_q \le \rho^{-n}\|p_n\|_{q,\,\rho}\ (1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1),$$

и, если предполагать $p_n \in S^*_{n+1}$, то неравенство (1.3.6) можно записать в следующем виде

$$\omega(p_n^{(r)}, 2t)_q \le 2(sin(n-r)t)_*\alpha_{n,r} \cdot \rho^{-n}\|p_n\|_{q,\,\rho}. \tag{1.3.13}$$

Для произвольного полинома $p_n \in S^*_{n+1}$ и всех $n, r \in \mathbb{N},\ n > r$ с учётом условия (1.3.3) и $0 < h \le \pi/2$, из (1.3.13) получаем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(p_n^{(r)}, 2t)_q \left\{1 + (\mu^2 - 1)sin\frac{\pi t}{2h}\right\} dt \le$$

$$\le 2\alpha_{n,r}\rho^{-n}\|p_n\|_{q,\,\rho} \cdot \int\limits_0^1 (sin(n-r)ht)_* \left[1 + (\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2}\right] dt \le$$

$$\le \frac{\pi}{2\mu}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right) \cdot \int\limits_0^1 (sin(n-r)ht)_* \left[1 + (\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2}\right] dt \le \Phi(h).$$

Из этого следует, что $S_{n+1} \subset W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$, а потому, согласно соотношениям (1.2.7) и определения бернштейновского n-поперечника, получаем оценку снизу

$$d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\,\rho}\right) \ge b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\,\rho}\right) \ge$$

$$\ge b_n\left(S_{n+1}; H_{q,\,\rho}\right) \ge \frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{1.3.14}$$

Сравнивая оценки (1.3.12) и (1.3.14) получаем требуемые равенства (1.3.11), откуда и следует доказательство теоремы 1.3.2.

Имеет место более общее утверждение

Теорема 1.3.3. *Если при заданном* $\mu \geq 1$, *любых* $n \in \mathbb{N}$, $0 < h \leq \pi/2$, *мажоранта* $\Phi(h)$ *удовлетворяет ограничения (1.3.3), то и для всех* $n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ 1 \leq q \leq \infty,\ 0 < \rho \leq 1$ *справедливы равенство*

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu) : \Lambda_{n-1,r-1,\rho} : \mathcal{P}_{n-1}\right)_{H_{q,\rho}} :=$$

$$= \sup\left\{\left\|f - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\rho}} : f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\} =$$

$$= \frac{\pi\rho^n}{4\mu(n-r)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{1.3.15}$$

Здесь $\pi_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot)$, *линейный полиномиальный оператор* $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)$ *определяется равенством*

$$\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f,z) := \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1 + \frac{\rho^{2(n-k)}\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\gamma_{k,r}\left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right) - 1\right]\right\}c_k(f)z^k, \tag{1.3.16}$$

где $n > r$ *и* $\gamma_{k,r} := (n-r)\mu \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \cos kt\ \cos(n-r)\mu t dt.$

При этом: а) линейный полиномиальный непрерывный оператор (1.3.16) является наилучшим линейным методом приближения класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ *в метрике пространства* $H_{q,\rho}$ $(1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq 1)$*;*

б) $L^*_{n+1} := span\{1, z, ..., z^n\}$ *есть оптимальное подпространство для бернштейновского* n*-поперечника* $b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right)$*;*

в) $L_n^* := span\{1, z, ..., z^{n-1}\}$ *является оптимальным подпространством для колмогоровского n-поперечника* $d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right)$*;*

г) $L_*^n := \{f : f \in H_{q,\rho}, f^{(k)}(0) = 0,\ k = 0, 1, ..., n-1\}$ *является для гельфандовского n-поперечника* $d^n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right)$ *оптимальным подпространством;*

д) $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}$*, определённый равенством (1.3.16), является оптимальным линейным методом (подпространством), реализующим линейный n-поперечник* $\delta_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right)$*.*

Доказательству теоремы предпошлём следующую лемму

Лемма 1.3.1. *Для произвольной функции* $f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ *при любых* $n, r \in \mathbb{N},\ n > r$ *и* $1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1$ *имеет место*

$$\left\|f - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{q,\rho} \le \frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{1.3.17}$$

Если мажорирующая функция $\Phi(h)$ *при* $0 < h \le \pi/2$ *удовлетворяет условию (1.3.3), то неравенство (1.3.17) неулучшаемо в том смысле, что существует функция* $f_1 \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$*, для которой (1.3.17) обращается в равенство.*

Доказательство. Повторив буквально схему рассуждений, приведенную в [14, с. 667] и [16, с. 324], для произвольной функции f из класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ получаем неравенство

$$\left\|f - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{q,\rho} \le$$

$$\le \frac{(n-r)\rho^n}{2\alpha_{n,r}} \cdot \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \omega(f^{(r)}, 2t)_q \left[1 + (\mu^2 - 1)sin\mu(n-r)t\right]dt. \tag{1.3.18}$$

Для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q(\Phi; \omega, \mu)$ и учитывая определение этого класса, из правой части (1.3.18) получаем

$$\frac{(n-r)\rho^n}{2\alpha_{n,r}} \cdot \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \omega(f^{(r)}, 2t)_q \left[1 + (\mu^2 - 1) sin\mu(n-r)t\right] dt =$$

$$= \frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}} \left(\frac{2\mu(n-r)}{\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \omega(f^{(r)}, 2t)_q \left[1 + (\mu^2 - 1) sin\mu(n-r)t\right] dt \right) \leq$$

$$\leq \frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{1.3.19}$$

Из правых частей неравенств (1.3.18) и (1.3.19) следует (1.3.17).

Теперь в случае, когда мажорирующая функция $\Phi(h)$ удовлетворяет условию (1.3.3), покажем, что существует функция в классе $W^{(r)}H_q(\Phi; \omega, \mu)$ для которой неравенство (1.3.17) обращается в равенство. И ещё покажем, что функция

$$f_1(z) = \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right) z^n \tag{1.3.20}$$

принадлежит классу $W^{(r)}H_q(\Phi; \omega, \mu)$. Во время доказательства теоремы 1.3.2, мы установили, что шар $S^*_{n+1} \in W^{(r)}H_q(\Phi; \omega, \mu)$. Для экстремальной функции (1.3.20) имеем

$$\|f_1\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right),$$

то $f_1 \in S^*_{n+1}$ и, следовательно, $f_1 \in W^{(r)}H_q(\Phi; \omega, \mu)$. Из представления (1.3.16) следует, что $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f_1) \equiv 0$, а потому

$$\left\| f_1 - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f_1) \right\|_{H_{q,\rho}} = \left\| f_1 \right\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \tag{1.3.21}$$

откуда и следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1.3.3. В самом деле, из соотношения (1.2.7) и равенства (1.3.21) вытекает, что при выполнении условия (1.3.3) на мажоранту $\Phi(h)$ для линейного n-поперечника имеют место

$$\delta_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_{q,\rho}\right)\leq$$

$$\leq\mathscr{E}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu):\Lambda_{n-1,r-1,\rho}:\mathcal{P}_{n-1}\right)_{H_{q,\rho}}=$$

$$=\frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \qquad (1.3.22)$$

причём из (1.3.21) и (1.3.22) заключается, что линейный полиномиальный оператор $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)$ есть наилучший линейный метод приближения класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$ $(1\leq q\leq\infty, 0<\rho\leq 1)$.

Теперь получим оценку сверху для гельфандовского n-поперечника. Для произвольной функции $f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\cap L_*^n$, с учётом (1.3.16), (1.3.17) и соотношений

$$c_k(f)=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=0,(k=0,1,2,...,n-1),$$

имеем

$$d^n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_{q,\rho}\right)\leq$$

$$\leq sup\left\{\|f\|_{q,\rho}:f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\cap L_*^n\right\}\leq$$

$$\leq\frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{nr}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \qquad (1.3.23)$$

Сопоставляя неравенств (1.3.14), (1.3.22) и (1.3.23), убедимся, что подпространство

$$L_*^n=\left\{f:f\in H_{q,\rho},\ f^{(k)}(0)=0,k=0,1,...,n-1\right\}$$

коразмерности n будет экстремальным подпространством для гельфандовского n-поперечника $d^n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_{q,\rho}\right)$, так и завершаем утверждение теоремы 1.3.3.

Результат, полученный в теореме 1.3.3, применяем к задаче вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора $c_n(f)$ на классе $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$.

Теорема 1.3.4. *Для любых* $n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$; $\mu\ge 1$ *и* $1\le q\le\infty$ *справедливо равенство*

$$\mathscr{L}_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)=\sup\left\{\Big|c_n(f)\Big|:f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right).\tag{1.3.24}$$

Доказательство. Очевидно, что используя линейный оператор (1.3.16) для $f\in\mathcal{A}(U)$, коэффициенты Тейлора $c_n(f)$ представим в виде

$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}f(\zeta)\zeta^{-n-1}d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi\rho^n}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left[f(\rho e^{it})-\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;\rho e^{it})\right]e^{-int}dt.$$

Применяя неравенство Гельдера и соотношение (1.3.22), для функции $f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ получаем

$$|c_n(f)|\le\rho^{-n}\mathscr{E}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);\Lambda_{n-1,r-1,\rho};\mathcal{P}_{n-1}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right).$$

Из этого неравенства следует, что

$$\mathscr{L}_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)\le\frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right).\tag{1.3.25}$$

Для получения соответствующей оценки снизу, равной правой части (1.3.25), рассмотрим снова, введенную при доказательстве леммы, экстремальную функцию

$$f_1(z) = \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right) z^n \in W^{(r)}H_q(\Phi; \omega, \mu),$$

для которой, согласно определению $\mathscr{L}_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)$, получаем

$$\mathscr{L}_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right) \geq |c_n(f_1)| = \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \qquad (1.3.26)$$

Требуемые равенства (1.3.24) следует из сопоставления оценки сверху (1.3.25) и снизу (1.3.26), откуда и следует доказательство теоремы 1.3.4.

Аналогичные результаты для классов функций, определяемых модулями непрерывности от производных по аргументу $f_a^{(r)}(z)$, получены в работе М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [44].

Глава II

Наилучшие линейные методы приближения классов функций и значения n-поперечников, задаваемых модулями гладкости в пространстве Харди H_q $(1 \leq q \leq \infty)$

Этот глава посвящается нахождению наилучших линейных методов приближений аналитических в круге $|z| \leq 1$ функций, задаваемых усреднёнными с весом $\dfrac{1}{h}\left(1+(\mu^2-1)\sin\dfrac{\pi t}{2h}\right)$, как значениями модулей гладкости r-ых обычных производных, так и r-ых производных по аргументу и вычислению точных значений линейных и гельфандовских n-поперечников. Решается также задача оптимального восстановления и кодирование линейных функционалов по дискретной информации.

§2.1. Наилучшие линейные методы приближения и точные значения n-поперечников класса $W_a^{(r)}H_q\left(\Phi;\omega_2,\mu\right)$

В этом параграфе найдены наилучшие линейные методы приближения аналитических для класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, изучавшихся Н.Айнуллоевым [5], и вычислены также точные значения их линейных и гельфандовских n-поперечников.

Пусть $\Phi(x)$ $(x \geq 0)$ — произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0)=0$. Для любого заданного значения параметра $\mu \geq 1/2$ рассмотрим класс функций [5]:

$$W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)=\left\{f\in H_{q,a}^{(r)}:\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega_2(f_a^{(r)};2t)_q\left[1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right]dt\le\Phi(h)\right\},$$

где $r\in\mathbb{N}, h\in(0,\pi/2],\ 1\le q\le\infty$ и μ — произвольное фиксированное число.

В работе Н.Айнуллоева [5] доказано, что если при заданном $\mu\ge 1/2$ и при любом $h,t\in(0,\pi/2]$ мажоранта Φ удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{\pi-2}\int\limits_0^1\left(1-\cos\frac{\pi ht}{2\tau\mu}\right)_*\left(1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right)\,dt\le\frac{\Phi(t)}{\Phi(\tau)},\tag{2.1.1}$$

где $(1-\cos t)_*=\{1-\cos t,$ если $0\le t\le\pi; 2$ если $t\ge\pi\}$, то для любого натурального n справедливо равенство

$$d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_q\right)=\frac{\pi}{2(\pi-2)n^r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right).\tag{2.1.2}$$

Условию (2.1.1) удовлетворяет мажоранта $\Phi(u)=u^{\alpha(\mu)}$, где

$$\alpha(\mu)=\frac{\pi^2}{2(\pi-2)}\int\limits_0^1 t\left(1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2\mu}\right)\,dt.\tag{2.1.3}$$

Так как $\alpha(1/2)=4/(3(\pi-2))$ и $\lim\limits_{\mu\to\infty}\alpha(\mu)=2$, причём $\alpha(\mu)$ непрерывна и возрастает, то границы значения $\alpha=\alpha(\mu)$ удовлетворяют неравенству

$$4/(3(\pi-2))\le\alpha(\mu)\le 2.$$

Пользуясь схемой рассуждений, изложенных в работе С.Б.Вакарчука [15], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [17], результат (2.1.2) можно распространить на более общее пространство $H_{q,\rho}$ $(1\le q\le\infty, 0<\rho\le 1)$:

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu),H_{q,\rho}\right)=d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu),H_{q,\rho}\right)=$$

$$=\frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)n^r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right).\tag{2.1.4}$$

Теорема 2.1.1. *Если при заданном* $\mu \geq 1/2$ *и при любом* $h, t \in (0, \pi/2]$ *мажоранта* Φ *удовлетворяет условию (2.1.1), то для любого* $n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < \rho \leq 1$ *справедливы равенства*

$$d^n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu); H_{q,\rho}\right) = \delta_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= \sup\left\{\left\|f - \mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\rho}} : f \in W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu)\right\} =$$

$$= \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)n^r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \tag{2.1.5}$$

При этом

$$\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f, z) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\left\{1 + \left(\frac{k}{2n-1}\right)^r \rho^{2(n-k)}\left[\gamma_{k,n}\left(1 - (\frac{k}{2n-k})^2\right) - 1\right]\right\} c_k z^k \tag{2.1.6}$$

— наилучший линейный метод приближения класса $W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$ *в метрике пространства* $H_{q,\rho}$*, где*

$$\gamma_{k,n} = \frac{2\mu n}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kt(1 - \sin \mu nt)\ dt.$$

Доказательство. Следуя схеме рассуждений из [15, 17], введём обозначения:

$$V_{n-1,r,\rho}(f, z) \overset{\text{def}}{=} c_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^r \rho^{2(n-k)}\right) c_k z^k,$$

$$\mathscr{B}_{n-1,r}(\rho, t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2n^r} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{(n+k)^r} \cos kt.$$

Легко проверить, что функция $\mathscr{B}_{n-1,r}(\rho, t)$ удовлетворяет условиям леммы 2.1 из [3, стр. 251] и при всех $0 < \rho \leq 1$ и $t \in [-\pi, \pi]$ является положительной. Для функции $f \in W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$ непосредственной проверкой запишем

$$f(\rho z) - V_{n-1,r,\rho}(f, \rho z) = \frac{\rho^n}{\pi i^n} \int\limits_0^{2\pi} f_a^{(r)}(ze^{-it}) e^{int} \mathscr{B}_{n-1,r}(\rho, t)\ dt, z \in U. \quad (2.1.7)$$

Для получение оценки сверху величины наилучшей полиномиальной приближении элемента $f \in H_{q,a}^{(r)}$ в качестве промежуточного приближения используется специальная функция, которая в нашем случае имеет вид:

$$\mathscr{F}(f, z) = \frac{\mu n}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \Big\{ f(ze^{it}) + f(ze^{-it}) \Big\} \Big(1 - \sin \mu n t \Big)\ dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k,n} c_k z^k. \quad (2.1.8)$$

Из (2.1.8) следует, что

$$\mathscr{F}(f_a^{(r)}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k,n} (ik)^r c_k z^k.$$

Обозначим

$$\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} V_{n-1,r,\rho}(f, z) + \Lambda_{n-1,r,\rho}(f, z),$$

где

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) \left(\frac{k}{2n-k} \right)^r \rho^{2(n-k)} \gamma_{k,n} c_k z^k. \quad (2.1.9)$$

Непосредственным вычислением легко проверить справедливость интегрального представления

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f, z) = \frac{\rho^n}{\pi i^r} \int\limits_0^{2\pi} V_{n-1,2,1} \Big(\mathscr{F}(f_a^{(r)}), ze^{-it} \Big) e^{int} \mathscr{B}_{n-1,r}(\rho, t)\ dt. \quad (2.1.10)$$

Воспользуясь равенствами (2.1.7) и (2.1.10), имеем:

$$f(\rho z) - \mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f, \rho z) =$$

$$= \frac{\rho^n}{\pi i^r} \int\limits_0^{2\pi} \Big\{ f_a^{(r)}(ze^{-it}) - V_{n-1,2,1}\left(\mathscr{F}(f_a^{(r)}), ze^{-it}\right)\Big\} e^{int} \mathscr{B}_{n-1,r}(\rho, t)\ dt. \quad (2.1.11)$$

Применяя обобщённое неравенство Минковского, при помощи равенства $\|\mathscr{B}_{n-1,r}(\rho, \cdot)\|_{L_{[0,2\pi]}} = n^{-r}$, из равенства (2.1.11) имеем:

$$\|f - \mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f)\|_{H_{q,\,\rho}} \leq \rho^n n^{-r} \|f_a^{(r)} - V_{n-1,2,1}\left(\mathscr{F}(f_a^{(r)})\right)\|_{H_q} \leq$$

$$\leq \rho^n n^{-r} \Big\{ \|f_a^{(r)} - \mathscr{F}(f_a^{(r)})\|_{H_q} + \|\mathscr{F}(f_a^{(r)}) - V_{n-1,2,1}\left(\mathscr{F}(f_a^{(r)})\right)\|_{H_q} \Big\}. \quad (2.1.12)$$

Из [5, с.93] сразу получаем оценку сверху

$$\|f_a^{(r)} - \mathscr{F}(f_a^{(r)})\|_{H_q} \leq \frac{\mu n}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(F_a^{(r)}, 2t)_{H_q}(1 - \sin \mu n t)\ dt. \quad (2.1.13)$$

Оценим второе слагаемое правой части (2.1.12), как и в [17, 32], считаем $\mathscr{F}(f_a^{(r)}, z)$ алгебраическим полиномом $\mathcal{P}_m(z)$ некоторого порядка m. Так как множество полиномов является всюду плотным в пространстве H_q, то проводимые ниже математические операции над функцией $\mathscr{F}(f_a^{(r)}, z)$ являются корректными. Полагая в (2.1.7) $\rho = 1$ и заменяя $f(z)$ на $\mathscr{F}(f_a^{(r)}, z)$, запишем

$$\mathscr{F}(f_a^{(r)}, z) - V_{n-1,2,1}(\mathscr{F}(f_a^{(r)}), z) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathscr{F}_a^{(2)}(f_a^{(r)}, ze^{-it}) \mathscr{B}_{n-1,2}(1, t)\ dt. \quad (2.1.14)$$

Применяя к равенству (2.1.14) обобщенное неравенство Минковского и пользуясь неотрицательностью ядра $\mathscr{B}_{n-1,2}(1, t)$, получаем

$$\left\|\mathscr{F}(f_a^{(r)}) - V_{n-1,2,1}\left(\mathscr{F}(f_a^{(r)})\right)\right\|_{H_q} = \left\| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathscr{F}_a^{(2)}(f_a^{(r)}, ze^{-it}) \mathscr{B}_{n-1,2}(1, t)\ dt \right\|_{H_q} \leq$$

$$\leq \left\| \mathscr{F}_a^{(2)}(f_a^{(r)}, \cdot) \right\|_{H_q} \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathscr{B}_{n-1,2}(1,t)\; dt =$$

$$= \left\| \mathscr{F}_a^{(2)}(f_a^{(r)}, \cdot) \right\|_{H_q} \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2n^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^2} \cos kt \right)\; dt =$$

$$= \frac{1}{n^2} \left\| \mathscr{F}_a^2(f_a^{(r)}) \right\|_{H_q}. \tag{2.1.15}$$

Чтобы дальше оценивать правую часть равенства (2.1.15), воспользуемся функцией общего вида $\mathscr{F}(f, z)$ в равенстве (2.1.8).

Теперь в принятых обозначениях запишем равенство

$$\frac{1}{n^2} \| \mathscr{F}_a^2(f_a^{(r)}) \|_{H_q} = \frac{\mu}{(\pi-2)n} \left\| \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} [F_a^{(r+2)}(\tau+t) + F_a(\tau-t)](1-\sin \mu nt)\; dt \right\|_{H_q}.$$

Выполнив дважды интегрирование по частям в правой части интеграла, затем применив обобщённое неравенство Минковского, получаем

$$\frac{1}{n^2} \| \mathscr{F}_a^{(2)}(f_a^{(r)}) \|_{H_q} \leq$$

$$\leq \frac{\mu^3 n}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \left\| F_a^{(r)}(\tau+t) - 2F_a^{(r)}(\tau) + F_a^{(r)}(\tau - t) \right\|_{H_q} \sin \mu nt\; dt \leq$$

$$\leq \frac{\mu^3 n}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(F_a^{(r)}, 2t)_{H_q} \sin \mu nt\; dt. \tag{2.1.16}$$

Из (2.1.15) и (2.1.16) следует, что

$$\left\| \mathscr{F}(f_a^{(r)}) - V_{n-1,2,1}\left(\mathscr{F}(f_a^{(r)}) \right) \right\|_{H_q} \leq$$

$$\leq \frac{\mu^3 n}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(F_a^{(r)}, 2t)_{H_q} \sin \mu nt\; dt. \tag{2.1.17}$$

Используя определение класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ и неравенства (2.1.13) и (2.1.17), имеем

$$\|f-\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f)\|_{H_{q,\,\rho}} \leq$$

$$\leq \rho^n n^{-r}\Big\{\Big\|f_a^{(r)}-\mathscr{F}(f_a^{(r)})\Big\|_{H_q}+\Big\|\mathscr{F}(f_a^{(r)})-V_{n-1,2,1}\Big(\mathscr{F}(f_a^{(r)})\Big)\Big\|_{H_q}\Big\}\leq$$

$$\leq \rho^n n^{-r}\Big\{\frac{\mu n}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)}\omega_2(F_a^{(r)},2t)_{H_q}(1-\sin\mu nt)\,dt+$$

$$+\frac{\mu^3 n}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)}\omega_2(F_a^{(r)},2t)_{H_q}\sin\mu nt\,dt\Big\}=$$

$$=\frac{\mu n\rho^n}{(\pi-2)n^r}\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)}\omega_2\left(F_a^{(r)},2t\right)_{H_q}\Big\{1+(\mu^2-1)\sin(\mu nt)\Big\}\,dt\leq$$

$$=\frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)n^r}\left\{\frac{2\mu n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)}\omega_2\left(F_a^{(r)},2t\right)_{H_q}\Big\{1+(\mu^2-1)\sin(\mu nt)\Big\}\,dt\right\}\leq$$

$$\leq\frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \qquad (2.1.18)$$

Из неравенства (2.1.18) сразу следует оценка сверху линейного n-поперечника

$$\delta_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu),H_{q,\,\rho}\right)\leq\frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \qquad (2.1.19)$$

Сопоставив значения n-поперечников из равенство (2.1.4) с оценкой (2.1.19), при помощи неравенств (1.1.2), получаем требуемое равенство (2.1.5), чем и завершаем утверждение теоремы 2.1.1.

§2.2. Наилучшие линейные методы приближения и значения n-поперечников класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$

В предыдущем параграфе нами найдены наилучшие линейные методы приближения аналитических в единичном круге функций для класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, задаваемых усреднёнными с весом $\frac{1}{h}\left(1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right)$ значениями модулей гладкости r-ых производных по аргументу $f_a^{(r)}(z)$. Здесь мы рассмотрим ту же задачу с усреднёнными значениями обычных производных r-го порядка $f^{(r)}(z)$ для класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$.

2.2.1. Предварительные результаты

Таким образом, в ранее принятых обозначениях, если

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)z^k,\ z=\rho e^{it},\ 0\le\rho\le 1$$

— степенной ряд Тейлора, то полагаем

$$f^{(r)}(z)=\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k(f)z^{k-r},$$

а её граничное значение $f^{(r)}(z)$ через

$$F^{(r)}(t)=\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k(f)e^{i(k-r)t}.$$

Пусть $\Phi(x)$ $(x\ge 0)$ – произвольная положительная неубывающая функция такая, что $\Phi(0)=0$. Для любого заданного значения параметра $\mu\ge 1/2$ рассмотрим класс функций (см., [13, с.187], [5, с.95]):

$$W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)=\left\{f\in H_q^{(r)}:\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega_2(F^{(r)};2t)_q\left[1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right]dt\le\Phi(h)\right\},$$

где $r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty$ и $h \in (0, \pi/2]$.

Сформулируем один из основных результатов.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ \mu \geq 1/2$ *и мажоранта* Φ *при всех* $h \in (0, \pi/2]$ *удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\left(\pi/(2\mu(n-r))\right)} \geq$$

$$\geq \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \frac{1}{h} \int\limits_0^h (1-\cos(n-r)t)_* \left(1 + (\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right) dt. \qquad (2.2.1)$$

Тогда для всех $1 \leq q \leq \infty$ *и* $0 < \rho \leq 1$ *имеют место равенства*

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right).$$

Доказательство. Н.Айнуллоев [5, с.93] доказал, что для любой $f \in H_q,\ 1 \leq q \leq \infty$ и $u \in (0, \pi/(2n)],\ n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_{H_q} \leq \frac{\pi}{2u(\pi-2)} \times$$

$$\times \int\limits_0^u \omega_2(F; 2x)_{H_q} \left\{1 + \left[\left(\frac{\pi}{2un}\right)^2 - 1\right]\sin\frac{\pi x}{2u}\right\} dx \qquad (2.2.2)$$

и для функции вида $f(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$ неравенство (2.2.2) обращается в равенство. Если в (2.2.2) полагать $\pi/(2un) = \mu$, откуда $un = \pi/(2\mu)$ $(\mu \geq 1/2)$, то неравенство (2.2.2) примет вид

$$E_{n-1}(f)_{H_q} \leq \frac{\mu n}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/(2n\mu)} \omega_2(F; 2x)_{H_q} \left\{1 + \left(\mu^2-1\right)\sin\mu n x\right\} dx. \qquad (2.2.3)$$

Воспользовавшись тем, что для любой функции $f \in H_q$ $(1 \leq q \leq \infty)$, у которой $f^{(r)} \in H_q$ $(1 \leq q \leq \infty)$, имеет место соотношение [32, с.287]

$$E_{n-1}(f)_{H_q} \leq \alpha_{n,r}^{-1} E_{n-r}(F^{(r)})_{H_q},\ n \geq r,\ n, r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty, \qquad (2.2.4)$$

неравенство (2.2.3) запишем в виде

$$E_{n-1}(f)_{H_q} \le \frac{\mu(n-r)}{(\pi-2)\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/(2(n-r)\mu)} \omega_2(F^{(r)};2x)_{H_q}\left\{1+\left(\mu^2-1\right)\sin{(n-r)\mu x}\right\}dx.$$

Отсюда для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, согласно определению класса, получаем

$$E_{n-1}(f)_{H_q} \le \frac{\pi}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\times$$

$$\times\left(\frac{2\mu(n-r)}{\pi} \int\limits_0^{\pi/(2(n-r)\mu)} \omega_2(F^{(r)};2x)_{H_q}\left\{1+\left(\mu^2-1\right)\sin{(n-r)\mu x}\right\}dx\right) \le$$

$$\le \frac{\pi}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \qquad (2.2.5)$$

Поскольку для функции $f \in H_q,\ 1 \le q \le \infty$ имеет место неравенство [22, с.49]

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\,\rho}} \le \rho^n E_{n-1}(f)_{H_q},\ 1 \le q \le \infty, 0 < \rho \le 1,$$

то из (2.2.5) следует, что при любом $n > r,\ n, r \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \qquad (2.2.6)$$

Из (2.2.6) с учётом соотношения (1.2.7) запишем оценки сверху

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_{q,\,\rho}\right) \le d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_{q,\,\rho}\right) \le$$

$$\le E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\right)_{H_{q,\,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \qquad (2.2.7)$$

С целью получения оценки снизу для указанных n-поперечников во множество $\mathcal{P}_n \cap H_{q,\rho}$ введём в рассмотрение $(n+1)$-мерны шар полиномов

$$\mathscr{B}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \leq \frac{\pi \rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right)\right\}$$

и покажем, что $\mathscr{B}_{n+1} \subset W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$. Заметим, что из неравенства [30, с.159]

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_q} \leq \alpha_{n,r}\|p_n\|_{H_q} \ (n > r,\ n,r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty)$$

и доказанного А.Пинкусом [3, с.255] соотношения

$$\|p_n\|_{H_q} \leq \rho^{-n}\|p_n\|_{H_{q,\rho}} \ (1 \leq q \leq \infty,\ 0 < \rho \leq 1),$$

верного для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$, получаем

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_q} \leq \alpha_{n,r}\rho^{-n}\|p_n\|_{H_{q,\rho}} \ (n > r,\ 1 \leq q \leq \infty,\ 0 < \rho \leq 1). \qquad (2.2.8)$$

Теперь, воспользовавшись неравенством [32, с.291]

$$\omega_2(p_n; 2x)_{H_q} \leq 2(1-\cos nx)_* \|p_n\|_{H_q}, \qquad (2.2.9)$$

заменяя в нём p_n на $p_n^{(r)}$ и затем применяя (2.2.8), для произвольного полинома $p_n \in \mathscr{B}_{n+1}$ будем иметь

$$\omega_2(p_n^{(r)}; 2x)_{H_q} \leq 2(1-\cos(n-r)x)_* \|p_n^{(r)}\|_{H_q}) \leq$$

$$\leq 2(1-\cos(n-r)x)_* \alpha_{n,r}\rho^{-n}\|p_n\|_{H_{q,\rho}}) \leq$$

$$\leq 2(1-\cos(n-r)x)_* \alpha_{n,r}\rho^{-n} \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\pi-2} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right)(1-\cos(n-r)x)_*. \qquad (2.2.10)$$

Из (2.2.10) для любого $h \in (0, \pi/2]$, с учётом определения класса $W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$ и ограничения (2.2.1), вытекает неравенство

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(p_n^{(r)}; 2x)_{H_q}\left(1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi x}{2h}\right)dx \leq \frac{\pi}{\pi - 2}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n - r)}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{h}\int\limits_0^h (1 - \cos(n - r)x)_*\left(1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi x}{2h}\right)dx \leq \Phi(h). \qquad (2.2.11)$$

Последнее соотношение означает, что шар $\mathscr{B}_{n+1} \subset W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$. Отсюда, согласно определению бернштейновского n-поперечника, получаем

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu); H_{q,\rho}\right) \geq b_n\left(\mathscr{B}_{n+1}; H_{q,\rho}\right) \geq$$

$$\geq \frac{\pi\rho^n}{2(\pi - 2)\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n - r)}\right). \qquad (2.2.12)$$

Завершаем доказательство теоремы 2.2.1, сравнивая оценку сверху (2.2.7) и оценку снизу (2.2.12).

2.2.2. Наилучший линейный метод приближения класса $W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$ и точные значения n-поперечников

Для нахождения точных значений гельфандовского и линейного n-поперечников нам потребуется построение наилучшего линейного метода приближения функций класса $W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$. С этой целью для произвольной $f \in \mathcal{A}(U)$ запишем следующий линейный полиномиальный оператор

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f; z) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k + \sum_{k=r}^{n-1}\left\{1 + \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\rho^{2(n-k)} \times\right.$$

$$\times \left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\Bigg\}c_k(f)z^k \tag{2.2.13}$$

степени $n-1$, где

$$\gamma_{k,r} \overset{def}{=} \frac{2\mu(n-r)}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)}\Big(1-\sin\mu(n-r)x\Big)\cos(k-r)xdx,\ k\geq r>1,\ k,r\in\mathbb{N}.$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 2.2.2. *Пусть произвольная функция* $f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, $\mu\geq 1/2$, $1\leq q\leq\infty$, $0<\rho\leq 1$, $n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$. *Тогда справедливо*

$$\|f-\Lambda_{n-1,r,\rho}(f)\|_{H_{q,\,\rho}}\leq\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{2.2.14}$$

Если мажорирующая функция Φ *при любом* $h\in(0,\pi/2]$ *удовлетворяет ограничению (2.2.1), то неравенство (2.2.14) неулучшаемо в том смысле, что существует функция* $f_1\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, *обращающая его в равенство.*

Доказательство. Для произвольной функции $f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, воспользовавшись идеей рассуждений из [16, с.324-327], полагаем

$$\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f;z)=\sum_{k=0}^{r-1}c_k(f)z^k+\sum_{k=r}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\rho^{2(n-k)}\right)c_k(f)z^k$$

и запишем интегральное представление разности [29, с.184-185], [16]

$$f(\rho z)-\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f;\rho z)=$$

$$=\frac{\rho^n z^n}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f^{(r)}(ze^{-it})e^{i(n-r)t}\mathscr{K}_{n,r}(\rho,t)dt,\ z\in U, \tag{2.2.15}$$

где

$$\mathscr{K}_{n,r}(\rho,t) \overset{def}{=} \frac{1}{\alpha_{n,r}} + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho^j}{\alpha_{n+j,r}} \cos jt. \tag{2.2.16}$$

Нетрудно проверить, что при любом $j \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^2 \left(\frac{\rho^j}{\alpha_{n+j,r}} \right) = \frac{\rho^j}{\alpha_{n+j,r}} - 2\frac{\rho^{j+1}}{\alpha_{n+j+1,r}} + \frac{\rho^{j+2}}{\alpha_{n+j+2,r}} \geq 0,$$

и в силу леммы 2.2 из [3, с.251] ядро $\mathscr{K}_{n,r}(\rho,t)$ — положительной и интегрируемой функцией. Справедливость равенства (2.2.15) проверяется непосредственным вычислением путём разложения производной $f^{(r)}$ в ряд Тейлора с последующим почленным интегрированием полученного подынтегрального выражения.

В качестве промежуточного приближения функции $f \in H_q$, у которой $f^{(r)} \in H_q$, воспользуемся следующей вспомогательной функцией [16, с.325]

$$\mathscr{F}_t(f^{(r)}; z) = \frac{\pi}{2t(\pi-2)} \times$$

$$\times \int\limits_0^t \left\{ f^{(r)}(ze^{ix}) + f^{(r)}(ze^{-ix}) \right\} \left(1 - \sin\frac{\pi x}{2t} \right) dx. \tag{2.2.17}$$

Если полагать в (2.2.17) $t = t_* := \pi/2\mu(n-r),\ n > r,\ n, r \in \mathbb{N},\ \mu \leq 1/2$ и разлагать производные $f^{(r)}$ в ряд Тейлора, то получим

$$\mathscr{F}_t(f^{(r)}; z) := \mathscr{F}_{t^*}(f^{(r)}; z) =$$

$$= \frac{\mu(n-r)}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \left\{ f^{(r)}(ze^{ix}) + f^{(r)}(ze^{-ix}) \right\} (1 - \sin\mu(n-r)x)\, dx =$$

$$= \sum_{k=r}^{\infty} \gamma_{k,r}\alpha_{k,r}c_k(f)z^{k-r} := \sum_{k=r}^{\infty} \gamma_{k+r,r}\alpha_{k+r,r}c_{k+r}(f)z^k,\ z \in U, \tag{2.2.18}$$

которое очевидно является элементом пространства H_q. Для произвольной функции $f \in H_q$, полагая

$$Q_{n-r-1,2}(f;z) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n-r-1} \left(1 - \left(\frac{k}{2(n-r)-k}\right)^2\right) c_k(f) z^k$$

и учитывая вид функции (2.2.18), запишем равенство

$$Q_{n-r-1,2}(\mathscr{F}_t(f^{(r)}); z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r-1} \gamma_{k+r,r}\alpha_{k+r,r}c_{k+r}(f) \left(1 - \left(\frac{k}{2(n-r)-k}\right)^2\right) z^k. \qquad (2.2.19)$$

Символом $\varphi_a^{(m)}$ обозначим m-ю производную функции φ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho e^{it}$, то есть положим

$$\varphi_a^{(1)}(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \varphi'(z)zi,$$

$$\varphi_a^{(m)}(z) = \{\varphi_a^{(m-1)}(z)\}'_a, \ m \geq 2, \ m \in \mathbb{N}.$$

Известно [16, с.325], что для произвольной $z \in U$ справедливо равенство

$$\varphi(z) - Q_{n-r-1,2}(\varphi; z) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi_a^{(2)}(ze^{-it})e^{i(n-r)t}G_{2,n-r}(t)dt, \qquad (2.2.20)$$

где

$$G_{2,n-r}(t) \overset{def}{=} \frac{1}{(n-r)^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{(n-r+k)^2}$$

— неотрицательная интегрируемая функция [3, лемма 2.2, с.251]. Из (2.2.20), применяя обобщённое неравенство Минковского, получаем

$$\Big\|\varphi - Q_{n-r-1,2}(\varphi)\Big\|_{H_q} \leq \frac{1}{(n-r)^2}\|\varphi_a^{(2)}\|_{H_q}. \qquad (2.2.21)$$

Для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$ построим линейный оператор $(n-1)$-й степени следующего вида

$$\Omega_{n-1,r,\rho}(f;\rho z) = \sum_{k=r}^{n-1} \gamma_{k,r}\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\rho^{2(n-k)} \left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right) c_k(f) z^k =$$

$$= \frac{\rho^n z^r}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} Q_{n-r-1,2}\left(\mathscr{F}(f^{(r)}); ze^{-it}\right) e^{i(n-r)t} \mathscr{K}_{n,r}(\rho, t)dt, \qquad (2.2.22)$$

в справедливости которого можно убедиться, учитывая произведение соотношений (2.2.16) и (2.2.19) и последующее почленное интегрирование полученного подынтегрального выражения. Полагая

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f; z) \overset{def}{=} \mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f; z) + \Omega_{n-1,r,\rho}(f; z)$$

и используя интегральные представления (2.2.15) и (2.2.22), для любого $z \in U$ и $0 < \rho \leq 1$ запишем равенство

$$f(\rho z) - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f; \rho z) = \frac{\rho^n z^r}{2\pi} \times$$

$$\times \int\limits_0^{2\pi} \left\{ f^{(r)}(ze^{-it}) - Q_{n-r-1,2}\left(\mathscr{F}(f^{(r)}); ze^{-it}\right)\right\} e^{i(n-r)t} \mathscr{K}_{n,r}(\rho, t)dt. \qquad (2.2.23)$$

Отсюда в силу обобщённого неравенства Минковского имеем

$$\left\| f - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f) \right\|_{H_{q,\,\rho}} \leq \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \left\| f^{(r)} - Q_{n-r-1,2}\left(\mathscr{F}(f^{(r)})\right) \right\|_{H_q} \leq \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \times$$

$$\times \left\{ \left\| f^{(r)} - \mathscr{F}(f^{(r)}) \right\|_{H_q} + \left\| \mathscr{F}(f^{(r)}) - Q_{n-r-1,2}\left(\mathscr{F}(f^{(r)})\right) \right\|_{H_q} \right\}. \qquad (2.2.24)$$

В силу первой части равенства (2.2.18) с учётом тождества

$$\frac{2\mu(n-r)}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2\mu(n-r))} (1 - \sin\mu(n-r)x)dx = 1,$$

запишем интегральное представление разности

$$\mathscr{F}(f^{(r)}; z) - f^{(r)}(z) = \frac{\mu(n-r)}{\pi - 2} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \left\{ f^{(r)}(ze^{ix}) - 2f^{(r)}(z) + f^{(r)}(ze^{-ix}) \right\} (1 - \sin\mu(n-r)x)\, dx$$

и оценим первое слагаемое в правой части неравенства (2.2.24), применив снова вышеуказанное неравенство Минковского:

$$\left\|f^{(r)}(z)-\mathscr{F}(f^{(r)})\right\|_{H_q}=\frac{\mu(n-r)}{\pi-2}\times$$

$$\times\left\|\int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)}\left\{f^{(r)}(ze^{ix})-2f^{(r)}(z)+f^{(r)}(ze^{-ix})\right\}(1-\sin\mu(n-r)x)\,dx\right\|_{H_q}\le$$

$$\le\frac{\mu(n-r)}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)}\omega_2(f^{(r)};2x)_{H_q}(1-\sin\mu(n-r)x)\,dx. \qquad (2.2.25)$$

Полагая $z=e^{it}$, введём обозначение $f^{(r)}(ze^{\pm ix}):=G(t\pm x)$ и приступим к оценке второго слагаемого в правой части неравенства (2.2.24), следуя рассуждениям из [32, с.289] и [16, с.326], будем считать, что $f^{(r)}$ — есть произвольный алгебраический полином p_m некоторой степени $m\in\mathbb{N}$, поскольку их множество всюду плотно в H_q. Очевидно, что при таком соглашении совместное приближение функции и её производной по аргументу в H_q законно, а потому можно полагать, что при $m=1,2$, производные $G_a^{(m)}\in H_q$. В таком случае, в силу (2.2.21), учитывая первое равенство в (2.2.18), имеем:

$$\left\|\mathscr{F}(f^{(r)})-Q_{n-r-1,2}\left(\mathscr{F}(f^{(r)})\right)\right\|_{H_q}\le$$

$$\le(n-r)^{-2}\left\|\left(\mathscr{F}(f^{(r)})\right)_a^2\right\|_{H_q}=\frac{\mu}{(n-r)(\pi-2)}\times$$

$$\times\left\|\int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)}\left\{G_a^{(2)}(t+x)+G_a^{(2)}(t-x)\right\}(1-\sin\mu(n-r)x)\,dx\right\|_{H_q}. \qquad (2.2.26)$$

Выполнив дважды интегрирование по частям в интеграле внутри нормы правой части соотношения (2.2.26), затем, применяя упомянутое неравенство Минковского и воспользовавшись определением модуля гладкости

H_q, запишем

$$\left\|\mathscr{F}(f^{(r)}) - Q_{n-r-1,2}\left(\mathscr{F}(f^{(r)})\right)\right\|_{H_q} \leq$$

$$\leq \frac{\mu(n-r)}{\pi-2}\left\| \int\limits_0^{\pi/(2\mu(n-r))} \{G(t+x) - 2G(t) + G(t-x)\}\, \mu^2 \sin\mu(n-r)x dx \right\|_{H_q} \leq$$

$$\leq \frac{\mu(n-r)}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \omega_2(f^{(r)}; 2x)_{H_q} \mu^2 \sin\mu(n-r)x dx. \qquad (2.2.27)$$

Для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$ из неравенств (2.2.24)-(2.2.27) с учётом определения указанного класса, имеем

$$\left\| f - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f) \right\|_{H_{q,\,\rho}} \leq \frac{\rho^n \mu(n-r)}{\alpha_{n,r}(\pi-2)} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \omega_2(f^{(r)}; 2x)_{H_q} \left\{1 + (\mu^2-1)\sin\mu(n-r)x\right\} dx = \frac{\pi\rho^n}{2\alpha_{n,r}(\pi-2)} \times$$

$$\times \left(\frac{2\mu(n-r)}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \omega_2(f^{(r)}; 2x)_{H_q} \left\{1 + (\mu^2-1)\sin\mu(n-r)x\right\} dx \right) \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right).$$

Для завершения доказательства теоремы 2.2.2 остаётся показать, что множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (2.2.1) и принадлежащих классу $W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$, не пусто. Для этой цели рассмотрим следующую функцию

$$f_1(z) \overset{def}{=} \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right) z^n, \ n > r, \ n, r \in \mathbb{N}, \ \mu \geq 1/2 \quad (2.2.28)$$

и покажем, что f_1 принадлежит классу $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$.

При доказательстве теоремы 2.2.1 показали, что $(n+1)$-мерная сфера $\mathscr{B}_{n+1}$ полиномов $p_n \in \mathcal{P}_n$ радиуса не более $\dfrac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\dfrac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\dfrac{\pi}{2\mu(n-r)}\right)$ при условии, что мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (2.2.1), принадлежит классу $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$. Для экстремальной функции (2.2.28) имеем

$$\|f_1(z)\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right) \tag{2.2.29}$$

и, следовательно, при выполнении ограничения (2.2.1) $f_1 \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.2.

Доказанная теорема 2.2.2 позволяет сформулировать следующее более общее утверждение.

Теорема 2.2.3. *Если при любых* $n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ \mu \geq 1/2$ *мажоранта* Φ *удовлетворяет ограничению (2.2.2), то при всех* $0 < \rho \leq 1$ *и* $1 \leq q \leq \infty$ *справедливы равенства*

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_{q,\rho}\right) = \mathscr{E}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);\Lambda_{n-1,r,\rho}\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \tag{2.2.30}$$

где $\pi_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников: Гельфанда* $d^n(\cdot)$*, линейный* $\delta_n(\cdot)$*. Линейный полиномиальный непрерывный оператор* $\Lambda_{n-1,r,\rho}(\cdot)$*, определённый равенством (2.2.13), является наилучшим линейным методом приближения класса* $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ *в пространстве* $H_{q,\rho}$*.*

Доказательство. В самом деле, учитывая вид линейного полиномиального непрерывного оператора (2.2.13), для функции (2.2.28) имеем $\Lambda_{n-1,r,\rho}(f_1) \equiv 0$, а потому в силу (2.2.29)

$$\mathscr{E}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);\Lambda_{n-1,r,\rho}\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= \sup\left\{\|f-\Lambda_{n-1,r,\rho}(f)\|_{H_{q,\rho}} : f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\right\} =$$

$$= \|f_1-\Lambda_{n-1,r,\rho}(f_1)\|_{H_{q,\rho}} = \|f_1\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \quad (2.2.31)$$

Используя определения линейного n-поперечника, из неравенства (2.2.14) и равенства (2.2.31) получаем оценку сверху

$$\delta_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_{q,\rho}\right) \le \mathscr{E}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);\Lambda_{n-1,r,\rho}\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \qquad (2.2.32)$$

Аналогично получаем оценку сверху для гельфандовского n-поперечника. Так как, для произвольной функции $f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\cap L_*^n$ в силу равенств (2.2.19), (2.2.23) и соотношений

$$c_k(f)=f^{(k)}(0)/(k!)=0,\ k=0,1,\ldots,n-1$$

для произвольной $z\in U$ имеет место интегральное представление

$$f(\rho z)=\frac{\rho^n z^n}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^{(r)}(ze^{-it})e^{i(n-r)t}\mathscr{K}_{n,r}(\rho,t)dt,$$

где $0<\rho\le 1$. В таком случае, из (2.2.13), (2.2.14) и определения гельфандовского n-поперечника получаем

$$d^n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_{q,\rho}\right) \le \sup\left\{\|f\|_{H_{q,\rho}} : f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\cap L_*^n\right\} \le$$

$$\le \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right),\ n>r,\ n,r\in\mathbb{N}. \qquad (2.2.33)$$

Сопоставляя неравенств (2.2.32) и (2.2.33) с равенствами (2.2.4) и (2.2.31), в силу неравенства (1.2.7) между всеми n-поперечниками получаем равенства (2.2.30). Этим доказевается, что линейный полиномиальный оператор (2.2.13) есть наилучшим линейным методом приближения класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ $(r\in\mathbb{N},\ \mu\ge 1/2)$ в $H_{q,\rho}$ $(1\le q\le\infty,\ 0<\rho\le 1)$.

2.2.3. Некоторые приложения

В качестве следствия из теоремы 2.2.3 получаем решение экстремальной задачи вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора $c_n(f)$ на классе $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ $(r\in\mathbb{N},\ 1\le q\le\infty,\ \mu\ge 1/2)$.

Отметим, что аналогичная задача на других классах аналитических функций ранее рассматривалась, например, в работах С.Б.Вакарчука [15], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [17].

Теорема 2.2.4. *При выполнении условий теоремы 2.2.3 справедливо равенство*

$$\sup\left\{|c_n(f)| : f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \qquad (2.2.34)$$

где $n,r\in\mathbb{N},\ n>r,\ 1\le q\le\infty.$

Доказательство. Коэффициенты Тейлора произвольной аналитической функции f в круге $|z|<\rho$ $(0<\rho\le 1)$ представимы в виде

$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho} f(\zeta)\zeta^{-n-1}d\zeta =$$

$$=\frac{1}{2\pi\rho^n}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left[f(\rho e^{i\tau})-\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;\rho e^{i\tau})\right]e^{-in\tau}d\tau. \qquad (2.2.35)$$

где $\Lambda_{n-1,r,\rho}(f)$ — линейный оператор, определённый равенством (2.2.13). В силу неравенства Гёльдера и неравенства (2.2.14), оценивая по абсолютной величине равенство (2.2.35), для $f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ получаем

$$|c_n(f)|\le\rho^{-n}\le\mathscr{E}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);\Lambda_{n-1,r,\rho}\right)_{H_{q,\rho}}\le$$

$$\le\frac{\pi}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right),$$

откуда сразу следует, что

$$\sup\Big\{|c_n(f)| : f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\Big\}\le$$

$$\le\frac{\pi}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \qquad (2.2.36)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим снова экстремальную функцию (2.2.28), принадлежащую классу $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$. Для этой функции имеем

$$\sup\Big\{|c_n(f)| : f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\Big\}\ge$$

$$\ge|c_n(f_1)|=\frac{\pi}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \qquad (2.2.37)$$

Сопоставляя оценки сверху (2.2.36) и оценки снизу (2.2.37), получаем (2.2.34), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.4.

2.2.4. Задачи оптимизационного содержания

Экстремальная задача отыскания точных значений n-поперечников компактных множеств функций тесно связана с задачами оптимизационного содержания, такими как оптимальное восстановление и кодирование линейных функционалов по дискретной информации, задаваемой, например, значениями функций и её производных в фиксированных точках, коэффициентами Фурье, коэффициентами Тейлора и т.п. В этом пункте мы рассмотрим задачи оптимального восстановления и кодирования в интерпретации Н.П.Корнейчука [26, с.375-384].

Пусть задан набор $\mathcal{M}_n\overset{def}{=}\{\mu_1,\mu_2,\ \cdots,\ \mu_n\}$ функционалов $\mu_j\in X^*$, $j=\overline{1,n}$ в нормированном функциональном пространстве X, где X^* — пространство, сопряжённое с X. Множество $\mathcal{M}_n$ можно рассматривать как метод кодирования, сопоставляющий каждому элементу $f\in X$ числовой вектор

$$\Im(f,\mathcal{M}_n)\overset{def}{=}\Big\{\mu_1(f),\mu_2(f),\ \ldots,\ \mu_n(f)\Big\}.$$

Пусть $\mathcal{P}_n \overset{def}{=} \Big\{p_k(z)\Big\}_{k=1}^{n}$ и $\Gamma_n \overset{def}{=} \Big\{\gamma_k\Big\}_{k=1}^{n}$ — соответственно произвольные система линейно независимых функций из X и набор числовых коэффициентов. Сопоставляя вектору $\Im(f, \mathcal{M}_n)$ функцию

$$U\big(f; \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n, \Gamma_n, z\big) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \ \mu_k(f) \ p_k(z),$$

решают задачу восстановления f по информации $\Im$, позволяющую наилучшим образом приспособиться к рассматриваемому классу $\mathfrak{M}$. Величину

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X = \inf\Big\{\sup\Big\{\|f - U\big(f; \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n, \Gamma_n\big)\| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : \ \Gamma_n \in \mathbb{C}^n\Big\}$$

называют погрешностью восстановления на классе $\mathfrak{M}$ и полагают

$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X : \ \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n\Big\}$$

$$\Big(\text{или} \ \ \mathcal{K}'_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}'_n, \mathcal{P}_n)_X : \ \mathcal{M}'_n, \mathcal{P}_n\Big\}\Big)$$

где $\mathcal{M}'_n$ — набор заданных на X линейных ограниченных функционалов.

Метод восстановления $(\mathcal{M}^*_n, \mathcal{P}^*_n, \Gamma^*_n)$ $\big($или $\mathcal{M}^{*'}_n, \mathcal{P}^*_n, \Gamma^*_n\big)$, для которого

$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\Big\{\|f - U\big(f; \mathcal{M}^*_n, \mathcal{P}^*_n, \Gamma^*_n\big)\| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}$$

$$\Big(\text{или} \ \ \mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\Big\{\|f - U\big(f; \mathcal{M}^{*'}_n, \mathcal{P}^*_n, \Gamma^*_n\big)\| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}\Big),$$

называют оптимальным (или оптимальным линейным) методом восстановления функций из $\mathfrak{M}$. При этом справедливы соотношения [26]

$$\mathcal{K}'_n(\mathfrak{M}, X) = \delta_n(\mathfrak{M}, X),$$

$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) \geq d_n(\mathfrak{M}, X). \tag{2.2.38}$$

Если $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathfrak{M}} + L$, где $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — компакт, L — конечномерное подпространство, то в неравенства (2.2.38) имеет место знак равенства.

Параллельно с $\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X$ рассматривают также величину

$$\gamma(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n)_X \overset{def}{=} \sup\Big\{\|f_1 - f_2\| : \ f_1, f_2 \in \mathfrak{M}, \ \Im(f_1, \mathcal{M}_n) = \Im(f_2, \mathcal{M}_n)\Big\},$$

которую с помощью фиксированного набора функционалов $\mathcal{M}_n$ интерпретируют как погрешность метода кодирования на классе $\mathfrak{M}$. Полагая при этом

$$\gamma^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\gamma(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n)_X : \ \mathcal{M}_n\right\},$$

получают

$$\gamma^n(\mathfrak{M}, X) \leq 2\mathcal{K}'_n(\mathfrak{M}, X).$$

Если множество $\mathfrak{M}$ центрально-симметрично и выпукло, то

$$\gamma^n(\mathfrak{M}, X) = 2\mathcal{K}'_n(\mathfrak{M}, X).$$

Результат, полученный в теореме 2.2.3, обеспечивает возможность сформулировать следующее утверждение в приведённых выше обозначениях.

Теорема 2.2.5. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$; $\mu \geq 1/2$, $0 < \rho \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ *и мажоранта* Φ *удовлетворяет ограничению (2.2.1). Тогда оптимальным линейным методом восстановления* $\left(\mathcal{M}_n^{*'}, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*\right)$ *функций* f *из класса* $W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu)$ *в пространстве* $H_{q,\rho}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$ *является линейный метод* $\Lambda_{n-1,r,\rho}(f, z)$, *определённый равенством (2.2.13), а наилучший метод кодирования определяется набором функционалов*

$$\mu_k(f) = c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

При этом

$$\gamma^n\left(W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu); H_{q,\rho}\right) = 2\mathcal{K}_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu), H_{q,\rho}\right) =$$

$$= 2\mathcal{K}'_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu), H_{q,\rho}\right) = \frac{\pi\rho^n}{(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right).$$

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- построены наилучшие линейные методы приближения классов функций типа Л.В.Тайкова [32] и для класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$ вычислены точные значения ряда n-поперечников;
- найдены наилучшие линейные методы приближения аналитических в единичном круге функций в метрике пространства Харди, усреднённый модуль непрерывности граничных значений r-ых производных которых мажорируется заданной функцией, и также вычислены точные значения различных n-поперечников класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$;
- найдены наилучшие линейные методы приближения аналитических функций для классов $W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ и $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, изучавшихся Н.Айнуллоевым [5], и вычислены точные значения их линейных и гельфандовских n-поперечников.

Данные результаты имеют теоретическое и прикладное значение. Они и метод их доказательства могут быть использованы при вычислении различных n-поперечников классов аналитических функций в других банаховых пространствах, таких как в весовые пространства Бергмана, Шильдса, Дюрена и Гварадзе.

Список литературы

1. Fisher S. D. Quantitative approximation theory // Amer. Math. Monthly. 1978. Vol. 85. P. 318–332.
2. Fisher S. D., Micchelli C. A. The n-widths of sets analytic function // Duke Math. J. 1980. Vol. 47, no. 4. P. 789–801.
3. Pinkus A. n-widths in approximation theory // Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. P. 252.
4. Scheick J. T. Polinomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17, no. 6. P. 1238–1243.
5. Айнуллоев Н. Поперечники классов аналитических функции в единичном круге // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Сборник научных трудов. Калининский госуниверситет. 1986. С. 91–101.
6. Айнуллоев Н., Тайков Л. В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 341–351.
7. Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. 1958. Т. 22, № 5. С. 631–640.
8. Белый В. И. К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге // Укр. мат. журнал. 1967. Т. 19, № 2. С. 104–108.
9. Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Укр. мат. журнал. 1989. Т. 41, № 26. С. 799–802.
10. Вакарчук С. Б. О наилучшем полиномиальном приближении аналитических в единичном круге функций // Укр. мат. журнал. 1990. Т. 42, № 6. С. 838–843.
11. Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в еди-

ничном круге функций // Укр. мат. журнал. 1990. Т. 42, № 7. С. 873–881.

12. Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30–39.
13. Вакарчук С. Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 2. С. 186–193.
14. Вакарчук С. Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 5. С. 665–669.
15. Вакарчук С. Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. мат. журнал. 2004. Т. 56, № 9. С. 1155–1171.
16. Вакарчук С. Б., Забутная В. И. О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // Матем. заметки. 2009. Т. 85, № 3. С. 323–329.
17. Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О поперечниках классов функций аналитических в круге // Матем. сборник. 2010. Т. 201, № 8. С. 3–22.
18. Давлатбеков Ф. Д. Наилучшие линейные методы приближения и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // Материалы международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел». 2015. 29-30 октября. С. 46–48.
19. Давлатбеков Ф. Д. Наилучшие линейные методы приближения и значения поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциаль-

ных уравнений». 2015. 27-28 апреля. С. 17–19.

20. Давлатбеков Ф. Д. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических функций // ДАН РТ. 2016. Т. 59, № 9-10. С. 367–372.
21. Давлатбеков Ф. Д. Наилучшие линейные методы приближения и точные значения некоторых классов аналитических в круге функций // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций». 2018. 27-28 февраля. С. 43–46.
22. Двейрин М. З. О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метрические вопросы теории функций и отображений. 1975. № 6. С. 41–54.
23. Двейрин М. З. Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1975. № 23. С. 32–46.
24. Двейрин М. З. Задачи наилучшего приближения классов функций, аналитических в единичном круге // Теория приближения функций. 1977. С. 129–132.
25. Двейрин М. З., Чебаненко И. В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. 1983. С. 62–73.
26. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М. : Наука, 1987. 424 с.
27. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М. : Гостехиздат, 1950. 350 с.
28. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М. Л. : Наука, 1964.

29. Тайков Л. В. О наилучших линейных методах приближения функций классов B^r и H^r // Успехи матем. наук. 1963. Т. 18, № 4(112). С. 183–189.
30. Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 155–162.
31. Тайков Л. В. Некоторые точные неравенства в теории приближения функций // Analysis Mathematica. 1976. Т. 2, № 1. С. 77–85.
32. Тайков Л. В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 285–295.
33. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15, № 3(93). С. 81–120.
34. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М. : МГУ, 1976. 325 с.
35. Шабозов М. Ш. О поперечниках в пространстве Харди H_2 классов аналитических функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // ДАН РТ. 1998. Т. 41, № 9. С. 48–53.
36. Шабозов М. Ш. Значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // Вестник Хорогского госуниверситета. 1999. Т. 1, № 1. С. 35–44.
37. Шабозов М. Ш., Давлатбеков Ф. Д. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди // ДАН РТ. 2015. Т. 58, № 3. С. 179–185.
38. Шабозов М. Ш., Давлатбеков Ф. Д. О наилучших линейных методах приближения и точных значениях некоторых классов аналитических в круге функций // ДАН РТ. 2016. Т. 59, № 5-6. С. 188–194.
39. Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р. О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций

в весовом пространстве Бергмана // ДАН России. 2013. Т. 450, № 5. С. 518–521.

40. Шабозов М. Ш., Пиров Х. Х. Точные константы в неравенствах типа Джексона для приближения аналитических функций из $H_p^r, 1 \leq p \leq 2$ // ДАН России. 2003. Т. 394, № 4. С. 399–401.
41. Шабозов М. Ш., Умеди Г. Точные неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве Харди H_p, $1 \leq p \leq 2$ // ДАН России. 2005. Т. 403, № 5. С. 610–613.
42. Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 5. С. 796–800.
43. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН России. 2002. Т. 382, № 6. С. 747–749.
44. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники некоторых классов функций в пространстве Харди // ДАН РТ. 2014. Т. 57, № 2. С. 97–102.
45. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А., Давлатбеков Ф. Д. Наилучшие линейные методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // Труды международной летней математической школы-конференции С.Б.Стечкина по теории функций. 2016. 15-25 августа. С. 290–295.