«У Т В Е Р Ж Д А Ю»
Ректор Таджикского государственного
педагогического университета им. С.Айни
________________ Н.У.Гаффори
«30» 08 2019 г.

О Т З Ы В

оппонирующей организации на диссертационную работу
Муродова Кариджона Насимовича
на тему
«Среднеквадратическое приближение функций суммами Фурье-Бесселя»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Теория приближения функций — одна из наиболее важных частей математического анализа, интенсивно развивается на протяжения многих десятилетий. Начало этой теории было заложено в знаменитых трудах великого русского математика П.Л.Чебышёва в середине XIX-го века в его работах о наилучшем равномерном приближении алгебраическими полиномами непрерывных на конечном отрезке функций и приближении непрерывной периодической функции тригонометрическими полиномами на всей оси. Эти работы были опубликованы на много лет раньше, чем классическая теорема К.Ф.Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами. Современное развитие этой теории связано с работами С.Н.Бернштейна и А.Н.Колмогорова. В тридцатых годах двадцатого столетия возникла задача приближения заданного класса функций фиксированным подпространством. В связи с решением этой задачи А.Н.Колмогоров поставил экстремальную задачу отыскания конкретного подпространства, которое приближает данный класс функций наилучшим образом. Величина, характеризующая минимальную погрешность в решении этой задачи, называется n-поперечником по Колмогорову, а подпространство, которое реализует точное решение этой задачи, называется экстремальным подпространством. В связи с этим интерес к вычислению n-поперечников по Колмогорову резко возрос и появились другие n-поперечники: n-поперечники по Гельфанду, по Бернштейну, линейные, проекционные, тригонометрические, информационные и этот процесс продолжается.

В решении задач отыскания точных значений n-поперечников различных классов функций существенный вклад внесли В.М.Тихомиров, Н.П.Корнейчук, Л.В.Тайков, А.А.Лигун, А.Пинкус, Н.И.Черных, А.Г.Бабенко, В.И.Иванов, С.Б.Вакарчук, Г.Г.Магарил-Ильяев, М.Ш.Шабозов и многие другие.

Диссертационная работа Муродова Каримджона Насимовича является дальнейшим развитием результатов перечисленных выше учёных, когда в качестве аппарата приближения используются обобщённые полиномы по системе ортогональных функций Бесселя. В ней рассматриваются задачи, связанные с отысканием точных оценок скорости сходимости рядов Фурье-Бесселя на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся усреднённым значением обобщённого модуля непрерывности m-го порядка в пространстве L_2 , нахождением точного неравенства Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Бесселя и специальными модулями непрерывности m-го порядка, а также вычислением различных n-поперечников классов функций. Решение перечисленных экстремальных задач является основной целью диссертационной работы.

Диссертация соответствует профилю диссертационного совета 6D.KOA - 012 при Таджикском национальном университете.

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 33 наименований, занимает 75 страниц машинописного текста, набранного на LaTeXe.

В диссертационной работе в качестве характеристики гладкости функции рассматривается обобщённый модуль непрерывности m-го порядка, конструкция которого построена на базе оператора сдвига

$$F_hf(x) = \int\limits_0^1 tf(t)T(x,t;1-h)dt$$

для обобщённых полиномов по системе ортогональных функций Бесселя. Этот обобщённый модуль непрерывности имеет вид

$$\Omega_m(f;t) = sup\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_{L_2} : 0 < h \leq t\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-h)^k)^{2m}c_k^2(f) : 0 < h \leq t\right\}^{1/2},$$

где $L_2 = L_2([0,1];xdx)$ – гильбертово пространство с весом x, $c_k(f)$– коэффициенты Фурье–Бесселя функции $f \in L_2$. Диссертантом получены точные неравенства Джексона–Стечкина, связывающие величину $E_{n-1}(f)$ — с усреднёнными значениями введённого обобщённого модуля непрерывности производной $\mathcal{D}(f)$, где $\mathcal{D}$ – оператор второго порядка Бесселя. Вычислены точные значения различных n-поперечников классов функций, определяемых обобщёнными модулями непрерывности $\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)$.

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы диссертации, формулируются цели и приводятся основные результаты работы автора. В первом параграфе первой главы приводится определение вспомогательных фактов, используемых далее в диссертации. В следующих двух параграфах найдены точные оценки скорости сходимости ряда Фурье-Бесселя на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка Бесселя и характеризующихся усреднённым значением обобщённого модуля непрерывности m-го порядка в пространстве L_2.

Одним из основных результатов первой главы является следующая

Теорема 1.3.1. *Для любых $r \in \mathbb{Z}_+$, $m, n \in \mathbb{N}$, $h \in (0,1)$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f) h^m}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} = \left(1 + \frac{1}{h}\cdot\frac{(1-h)^{n+1}-1}{n+1}\right)^{-m}. \qquad (1)$$

В частности, при $h = 1/(n+1)$ из (1) вытекает равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)}. \qquad (2)$$

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы* 1.3.1 *из равенства* (2) *следует*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} = e^m.$$

Среди экстремальных задач теории приближения функций наиболее важной является задача отыскания точных констант в неравенстве Джексона–Стечкина. Под неравенствами Джексона–Стечкина в широком смысле в любом нормированном пространстве X понимают соотношения, в которых величина $E_{n-1}(f)$ наилучшего приближения функций $f \in X$ оценивается через заданный модуль непрерывности $\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)$ самой приближаемой функции f или некоторой её производной $f^{(r)} \in X$. В этом направлении точные результаты для периодических функций получены в работах Н.П.Корнейчука, Л.В.Тайкова, А.А.Лигуна, Н.И.Черных, А.Г.Бабенко, В.И.Иванова, М.Ш.Шабозова, С.Б.Вакарчука, Г.А.Юсупова и многих других математиков. В четвёртом параграфе первой главы доказывается ряд точных неравенств Джексона–Стечкина, основным из которых является:

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < p \leq 2,\ 0 < h < 1,\ \varphi$ *– неотрицательная измеримая суммируемая на интервале* $(0, h)$ *неэквивалентная нулю функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}) \\ f \neq const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Из теоремы 1.4.1 в частности, при $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ и $h = 1/(n+1)$ вытекают некоторые результаты В.А.Абилова и других.

В последнее время при решении экстремальных задач теории приближений интенсивно используется $\mathcal{K}$-функционал Петре, имеющий следующий вид

$$\mathcal{K}(f, t^m) := \mathcal{K}(f, t^m; L_2; L_2^{(m)}(\mathcal{D})) =$$
$$= \inf\{\|f - g\| + t^m\|\mathcal{D}^m g\| : g \in L_2^{(m)}\mathcal{D}\},$$

где $m \in \mathbb{N}, 0 < t < 1$. В пятом параграфе первой главы доказана слабая эквивалентность между $\mathcal{K}$-функционалами Петре и обобщёнными модулями непрерывности m-го порядка и найдены точные оценки величины наилучших приближений посредством $\mathcal{K}$-функционала Петре. Основным результатом пятого параграфа является следующая

Теорема 1.5.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}) \\ f \neq const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)_{L_2}}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})_{L_2}} = 1.$$

В шестом параграфе первой главы найдены точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $L_{2,\nu} := L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right)$, с весом $x^{2\nu+1}$, где $\nu > -\frac{1}{2}$, которые обобщают результаты предыдущих параграфов.

Вторая глава состоит из двух параграфов, и в ней рассматривается задача отыскания точных значений различных n-поперечников классов дифференцируемых функций в пространствах L_2 и $L_{2,\nu}$.

Приведём основной результат первого параграфа второй главы.

Через $\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$ обозначим класс, состоящий из функций $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, у которых $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию $\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t)dt \leq 1$.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$, $0 < h < 1$, $\varphi \ge 0$ *- суммируемая на интервале* $(0, h)$ *неэквивалентная нулю функция. Тогда для произвольной* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi), L_2) = E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} =$$

$$= \lambda_n^{-2r} \left(\int\limits_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *- любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot), d_n(\cdot), \delta_n(\cdot), d^n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$, *а*

$$E_n(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} := \sup\{E_n(f)_2 : f \in \mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)_{L_2}\}.$$

Во втором параграфе второй главы определяется класс функций $W_{2,k}^{(r)}(\mathcal{K}_m; \Phi), r \in \mathbb{Z}_+, m, k \in \mathbb{N}$ $f \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})$, для которых функция $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию $\mathcal{K}_m(\mathcal{D}^r f, t^m) \le \Phi(t^m)$, где $0 < t \le 1$ – любое число, а мажоранта Φ – произвольная функция, принадлежащая $\mathcal{F}^1$.

Основным результатом второго параграфа является следующая

Теорема 2.2.1. *Для любых* $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *имеют место следующие равенства*

$$\rho_n \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), L_{2,\nu} \right) = E_{n-1} \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right)_{2,\nu} = \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}),$$

где $\rho_n(\cdot)$ *– любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$, *а*

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{2,\nu} := inf\,\{E_{n-1}(f)_{2,\nu} : \ f \in L_{2,\nu}\}$$

для $\mathfrak{M} \subset L_{2,\nu}$.

Отметим, что доказанные теоремы в некотором смысле являются обобщением недавно полученных результатов В.А.Абилова, Ф.В.Абиловой, М.К.Керимова, В.И.Иванова, Д.В.Чертова и Лю Юнпина.

В целом в диссертации проделана большая, содержательная работа. Наиболее важными являются результаты о поперечниках, изложенные в главе 2. При выводе этих результатов используются точные неравенства, доказанные в первой главе.

Автор диссертации владеет современными методами теории функций, функционального анализа и конструктивными методами теории функций. Диссертация написана автором самостоятельно, содержит новые научные результаты, выдвигаемые для публичной защиты и характеризующие личный вклад автора диссертации в теорию приближения функций.

Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются. Автореферат соответствует требованиям ВАК при

Президенте Республики Таджикистан, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы. Основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых журналах из Перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан, в том числе и в изданиях, рекомендованных ВАК Российской Федерации, а также доложены на ведущих по данной тематике международных конференциях и семинарах.

Автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, однако имеются некоторые замечания. Вот некоторые из них:

1. В автореферате (стр. 5) и в диссертации (в страницах 6 и 28) написано „$\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$", а должно быть „$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$".

2. В диссертации и автореферате в следствии 1.4.1 написано „Пусть $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ h \in (0,1), \varphi \geq 0$ - суммируемая на (0,h] функция. Тогда справедливо равенство". Для лучшего восприятия следствия надо было написать „Пусть $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ h \in (0,1), \varphi \geq 0$ - суммируемая на (0,h] функция, $p = 1/m$. Тогда справедливо равенство".

Отмеченные недостатки легко устранимы и не снижают общую высокую оценку диссертационной работы.

Вышесказанное даёт основание считать, что диссертационная работа Муродова Каримджона Насимовича «Среднеквадратическое приближение функций суммами Фурье-Бесселя», представленная на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, является научно-квалификационной работой и полностью соответствует требованиям, предъявляемым ВАК при Президенте Республики Таджикистан к кандидатским диссертациям, а её автор - Муродов Каримджон Насимович заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Результаты диссертационной работы Муродова Каримджона Насимовича заслушаны на специальном семинара кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета имени С.Айни 28 июня 2019 г.

Отзыв составил профессор кафедры математического анализа ТГПУ им. С.Айни, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ М.Азизов.

Отзыв обсуждён и утверждён на заседании кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. С. Айни (протокол №1 от 29.08.2019 г.).

Председатель семинара, доктор
физико-математических наук по
специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ,
профессор М.Азизов

Председатель заседания,
зав. кафедрой математического
анализа Таджикского государственного
педагогического университета имени С. Айни
кандидат физ.-мат. наук, доцент М.Б.Холикова

Секретарь заседания, старший
преподаватель С.Лашкарбеков

Адрес: Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни, 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект Рудаки, 121.
Сайт: www.tgpu.tj; e-mail: info@tgpu.tj
Тел. рабочий: +992(37) 224-13-83; тел. моб. (+992) 93 508 6897

Подписи М.Азизова, М.Б.Холиковой и С.Лашкарбекова заверяю

Начальник
УК и ОД ТГПУ им. С.Айни **Д.Назаров**