# О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию
Палавонова Курбоназара Курбонбековича
**«Приближение некоторых классов периодических функций и значение их поперечников»**,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Теория приближения функций — одна из центральных ветвей математического анализа. Возникшая в результате развития математической науки и потребностей практики, эта теория продолжает интенсивно развиваться на протяжении многих десятилетий. В ней отражена одна из фундаментальных идей математики — приближение сложных объектов более простыми и более удобными. Эта идея является определяющей в вопросах связи математики с практикой и стимулировала развитие теории приближения функций в прошлом и обеспечит интерес к ней в будущем. Хорошо известно, что основным объектом теории приближения функций являются задачи, связанные с необходимостью заменить сложные функции линейными суммами конечного числа более простых функций так, чтобы возникающая при этом погрешность была наименьшей. Если о функции нам известны лишь некоторые общие свойства, то целесообразно рассматривать задачу приближения класса таких функций. Как правило, при приближении классов функций предпочтение отдавалось алгебраическим или тригонометрическим полиномам. В последнее время в качестве средства приближения наравне с целыми функциями и сплайн-функциями используются вейвлет-функции и конечные элементы.

Диссертационная работа Палавонова Курбоназара Курбонбековича посвящена экстремальным задачам теории приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. В ней изучаются точные неравенства Джексона–Стечкина в терминах усредненных модулей непрерывности произвольного порядка, а также находятся точные значения различных $n$-поперечников классов функций, задаваемых указанными характеристиками гладкости (либо их мажорантами) как самих функций, так и их производных.

В диссертационной работе установлены окончательные оценки наилучших приближений тригонометрическими полиномами посредством усредненных с весом значений модулей непрерывности произвольного порядка и даны их приложения в задаче отыскания точных значений различных $n$-поперечников некоторых классов функций в $L_2$.

Все утверждения теорем, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, а также полученные автором точные неравенства, полностью обоснованы.

Полученные в диссертации результаты являются новыми и дополняют исследования Н. И. Черныха, Л. В. Тайкова, А. Г. Бабенко, А. А. Лигуна, В. И. Иванова, А. В. Иванова, С. Б. Вакарчука, М. Ш. Шабозава, В. Т. Шевалдина, Е. Е. Бердышевой, С. Фукарда, Я. Крякина, А. Шадрина, С. В. Васильева, Г. А. Юсупова и многих других в этом направлении. В частности, обобщены недавно полученные результаты М.Ш.Шабозова, Г.А.Юсупова в пространстве $L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$. По сравнению с ранее опубликованными результатами в этом направлении диссертанту удалось получить более точные результаты, а именно: найдены точные неравенства типа Джексона–Стечкина между величинами наилучших среднеквадратичных приближений периодических дифференцируемых функций и усредненные с весом значения модулей непрерывности высших порядков $r$-ых производных функций; найдены точные верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, задаваемых модулями непрерывности $m$-го порядка; вычислены точные значения различных $n$-поперечников на классах функций, задаваемых усредненными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков $r$-ых производных.

Основные результаты диссертации носят теоретический характер и имеют важное значение для дальнейшего развития теории приближения функций. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся проблемами теории приближения функций, в том числе в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан, в учебном процессе при чтении спецкурсов в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Уральском федеральном университете, Таджикском национальном университете Таджикском государственном педагогическом университете им С. Айни и в других научно-образовательных учреждегниях.

Диссертация К. К. Палавонова объемом 100 страниц состоит из введения, двух глав и списка цитированной литературы из 72 наименований.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации и излагаются основные результаты, полученные автором.

В первой главе рассматриваются вопросы, связанные с наилучшим приближением периодических функций в метрике пространства $L_2$ тригонометрическими полиномами порядка не боле $n-1$. В этой главе доказываются точные неравенства типа Джексона–Стечкина в терминах усредненных с весом модулей непрерывности высших порядков, принадлежащих пространству $L_p$ (теоремы 1.2.1-1.2.3, 1.3.1, 1.4.1, 1.5.1, 1.5.2 следствия 1.5.1). Вычисляются верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности заданного порядка(теоремы 1.6.1-1.6.6). Хотелось бы особо отметить результаты шестого параграфа первой главы, где доказывается совпадение различных аппроксимационных величин, для ряда классов функций $\mathfrak{M} \subset L_2$, таких как наилучшее приближение $E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$, верхняя грань норм $\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$ по всем функциям $f \perp T_{n-1}$, для которых $a_k(f) = b_k(f) = 0$, $k = \overline{0, n-1}$ (в обозначениях автора) и $\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$ — наилучшее линейное приближение заданного класса $\mathfrak{M}$ по всем линейным операторам, переводящим функции $f \in \mathfrak{M}$ в тригонометрических полиномах $T_{n-1} \subset \mathcal{T}_{2n-1}$.

В начале второй главы приводятся определения различных $n$-поперечников множеств ($n$-поперечники Колмогорова, Бернштейна, Гельфанда, линейный и проекционный) и при $1/r < p \leqslant 2$, $r, m \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ вводятся следующие классы функций

$$W_p^{(r)}(\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left( \int_0^h \frac{1}{t} \left( \int_0^t \omega^p(f^{(r)}, u)_{L_2} du \right) dt \right)^{1/p} \leqslant \Phi(h) \right\},$$

$$W_{m,p}^{(r)}(\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left( \frac{2}{h^2} \cdot \int_0^h (h-t) \omega_m^p(f^{(r)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \leqslant \Phi(h) \right\},$$

$$\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left( \frac{2}{h^2} \cdot \int_0^h t \omega_m^p(f^{(r)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \leqslant \Phi(h) \right\}.$$

Во втором, третьем и четвертом параграфах второй главы найдены точные значения $n$-поперечников по Бернштейну, Колмогорову, Гельфанду, а также значения линейных и проекционных поперечников всех перечисленных выше классов функций.

**К недостаткам можно отнести следующее.**

Стр. 29. Правильно “Квад” (W. Quade), а не “Кваде”.

Стр. 32. По поводу равенства, анонсированного Н. И. Черныхом на конференции в 1983 г., нужно дать ссылку не на доклад на конференции, а на конкретную работу.

Стр. 65. В определении наилучшего приближения приближения пропущено формальное условие $\mathfrak{M} \neq \emptyset$.

Стр. 67. "Первое неравенство в (2.1.10) можно найти в монографии А. Пинкуса [47], а все остальные – в монографии В. М. Тихимирова [57]". На самом деле первое неравенство тоже можно найти в монографии В. М. Тихимирова.

Для полноты изложения в работе стоило бы упомянуть ряд совсем недавних результатов К. В. Руновского и Н. В. Омельченко (Матем. сб., 208:2 (2017), 70–87; Матем. заметки, 100:3 (2016), 421–432; Матем. заметки, 99:4 (2016), 574–587, Матем. заметки, 103:2 (2018), 312–315).

Стр. 82. Фраза "... утверждение теоремы 2.3.1 является своеобразным обобщение основного результата работы М.Ш. Шабозова и С.Б. Вакарчука" загадочна.

В работе хорошо было бы иметь ссылку на недавнюю монографию А. С. Кочурова "Введение в теорию поперечников" (Москва, Онтопринт, 2017 г.).

Работа содержит ряд грамматических и орфографических ошибок.

Указанные замечания не являются существенными и не влияют на значимость результатов.

Диссертация К.К.Палавонова является самостоятельной, завершенной научной квалификационной работой.

К достоинству диссертации можно отнести следующие полученные в ней основные результаты: доказаны точные неравенства Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения функций и модулями непрерывности высшего порядка $r$-ых производных функций; найдены точные значения верхних граней наилучших приближений некоторых классов дифференцируемых функций из $L_2$, задаваемых усредненными с весами модулями непрерывности $m$-го порядка $r$-ых порядков; найдены точные значения различных $n$-поперечников классов функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков $r$-ых производных функций.

Автореферат соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

Диссертация Палавонова Курбоназара Курбонбековича “Приближение некоторых классов периодических функций и значение их поперечников” на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории приближения функций, и полностью соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан и положения о присуждении ученых степеней, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук,
по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ,
ведущий научный сотрудник лаборатории
вычислительных методов
механико-математического факультета,
ФГБОУ ВПО Московского государственного
университета имени М.В. Ломоносова

Алимов
Алексей Ростиславович
10.03.2018

Адрес: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы,
МГУ, д.1, Главное здание, механико-математический факультет
Телефон: +7 (495) 939 56 32
E-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

Подпись А.Р. Алимова удостоверяю
И.о. декана механико-математического
факультета МГУ имени М.В. Ломоносова
профессор В.Н. Чубариков