Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

На правах рукописи

Палавонов Курбоназар Курбонбекович

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЗНАЧЕНИЕ ИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
академик АН Республики
Таджикистан, доктор физ.-мат.
наук, профессор М.Ш.Шабозов

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 7

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Современная теория приближения функций является одной из наиболее бурно развивающихся ветвей математического анализа. Это направление науки имеет важное приложение в прикладных задачах. Среди актуальных задач теории приближения функций наиболее важной является задача отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина. Под неравенствами типа Джексона–Стечкина в широком смысле понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функций конечномерным подпространством оценивается через некоторую ее характеристики гладкости. В качестве такой характеристики обычно рассматривают модуль непрерывности самой функции или некоторой её производной.

В диссертационной работе установлены окончательные оценки наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами посредством модулей непрерывности произвольного порядка и даны их приложения в задаче отыскания точных значений n-поперечников функциональных классов.

Цель работы

Цель работы состоит в нахождении точных верхних граней наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами на некоторых классах непрерывных дифференцируемых функций и отыскании точных значений различных n-поперечников на указанных классах функций.

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Найдены точные неравенства типа Джексона–Стечкина между величинами наилучших среднеквадратичных приближений периодичес–

ких дифференцируемых функций и модулями непрерывности высших порядков r-ых производных функций.

- Найдены точные верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка.
- Вычислены точные значения различных n-поперечников на классах функций, задаваемых усредненными с весом значениями модулей непрерывности производных высших порядков.

Основные методы исследования

В диссертации используются современные методы теории приближения вариационного содержания и методы решения экстремальных задач теории функций.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация имеет теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться при решении других задач теории приближения, в частности, в задачах восстановления и кодирования функции по её коэффициентам Фурье, значения функций в заданных фиксированных точек на периоде. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по математическим специальностям.

Апробация работы

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2012-2017 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.);

- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания”, посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений” (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её приложений” (Душанбе, 3-4 июня 2016 г.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016 г.)

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 9 работах. Из них 5 статей опубликовано в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан, а 4 статьи в трудах международных конференций. Из совместных с научным руководителем М.Ш.Шабозовым работ [67] и [68] на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 72 наименований, занимает 100 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Всюду далее $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ – множество положительных чисел. Обозначим через $L_2 :=$

$L_2[0,2\pi]$ пространство 2π-периодических суммируемых с квадратом по Лебегу действительных функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\| \overset{def}{=} \|f\|_{L_2[0,2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Обозначим через

$$\mathcal{T}_{2n-1} = \left\{T_{n-1}(x) : \, T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right\}$$

— подпространство тригонометрических полиномов порядка не более $n-1$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,,$$

величина ее наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) \overset{def}{=} \inf\left\{\|f - T_{n-1}\| : \, T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right\}^{1/2},$$

где

$$S_{n-1}(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

– частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$, а $\rho_k^2 \overset{def}{=} a_k^2 + b_k^2$, где a_k и b_k – косинус-и синус-коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Через $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}[0,2\pi]$ $(r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} \equiv L_2)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2, то есть $f^{(r)} \in L_2$.

Равенством

$$\omega_m(f;t) := \sup\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : \, |h| \le t\},$$

определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$, где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(x + (m-k)h)$$

конечная разность m-го порядка функции $f(x)$ с шагом $h > 0$, а

$$\|\Delta_h^m f(\cdot)\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_h^m f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Всюду далее структурные свойства функции $f \in L_2$ характеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности m-го порядка r-ой производной $f^{(r)}$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усреднённой величины $\omega_m(f^{(r)}; t)$.

Неравенствами Джексона-Стечкина (или неравенствами типа Джексона-Стечкина) называют соотношения, в которых погрешность приближения $E_{n-1}(f)$ индивидуальной функции в рассматриваемом нормированном пространстве оценивается через модуль непрерывности заданного порядка самой приближаемой функции f или некоторой её производной $f^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$. При этом речь может идти как о наилучшем приближении фиксированным подпространством (например, в нашем случае, подпространство тригономет–рических полиномов), так и о приближении конкретным, в частности линейным методом. Ясно, что от приближаемой функции f требуется только, чтобы модуль непрерывности, через который оценивается погрешность, имел смысл. Параллельно здесь также возникает задача получения неравенств, неулучшаемых на этих широких множествах.

Модуль непрерывности — более тонкая характеристика функции, чем, ее норма в C или $L_p, (1 \leq p < \infty)$, и получение точной константы в неравенствах Джексона–Стечкина требует привлечения более глубоких фактов современной теории функций и функционального анализа.

Основное содержание первой главы настоящей диссертации составляет доказательство точных неравенств типа Джексона–Стечкина для полиномиальной аппроксимации функции $f \in L_2$.

Приводим краткий исторический обзор результатов относительно неравенств Джексона-Стечкина, где получены точные константы.

В 1911 г. Д.Джексон [22] доказал, что для произвольной функции $f \in C$, ($C \overset{def}{=} C[0, 2\pi]$) имеет место следующее неравенство

$$E_{n-1}(f)_C := E(f, \mathcal{T}_{2n-1}) = \inf\left\{\|f(x) - T_{n-1}\|_C : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\} \leq$$
$$\leq \chi\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_C \qquad (0.0.1)$$

и если $f \in C^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+, C^{(0)} = C$), то имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f)_C \leq \frac{\chi_r}{n^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_C, \ (n \in \mathbb{N}\ r \in \mathbb{Z}_+), \qquad (0.0.2)$$

где в неравенстве (0.0.1) константа χ не зависит ни от f, ни от n, а в неравен–стве (0.0.2) константа χ_r не зависит от f и n, а зависит только от r.

Для модулей непрерывности $\omega_m(f, \pi/n)_C$ произвольного порядка $m \in \mathbb{N}$ неравенство вида (0.0.2) было доказано С.Б.Стечкиным [51].

В метрике $L_p[0, 2\pi]$ $(1 \leq p < \infty)$ аналоги неравенства (0.0.1) и (0.0.2) при $m = 1$ в 1937 г. получил Е.С.Кваде [28]. В дальнейшем в пространстве $L_p[0, 2\pi]$ С.Б.Стечкин [50] получил неравенство (0.0.2) при $m \geq 2$, а при $m = 2$ этот результат ранее был опубликован Н.И.Ахиезером [4]. Первые точные неравенства Джексона были получены Н.П.Корнейчуком [30, 32, 33] для пространства $C[0, 2\pi]$ ещё в 1962 г., а для пространства $L_2[0, 2\pi]$ Н.И.Черныхом [60, 61] в 1967 г. В 1979 г. Н.И.Черных получил минимальное значение аргумента в модуле непрерывности, при котором точная константа в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ выходит на свой глобальный минимум. Нахождение таких аргументов, называемых оптимальными аргументами или точками Черныха, становится важной экстремальной задачей. Этой задаче посвящены, например, работы А.Г.Бабенко [5, 6, 8] и В.И.Иванова [26, 27].

После результатов Н.П.Корнейчука и Н.И.Черных появился неослабевающий интерес к получению точных неравенств Джексона–Стечкина и в других банаховых пространствах. В 1992 г. Н.И.Черных

[62] доказал точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L_p(-\pi,\pi]$ $(1\le p\le 2)$. При $p>2$ эта задача пока остаётся нерешённой.

Позднее этой тематикой занимались В.В.Арестов [1], А.Г.Бабенко [5–9], В.И.Бердышев [11], В.В.Жук [24, 25], В.И.Иванов [26, 27], А.А. Лигун [35–38], Л.В.Тайков [53,54], В.А.Юдин [71,72] С.Б.Вакарчук [12–19], В.В.Шалаев [70], С.Н.Васильев [20,21], Н.А.Барабошкина [10], М.Ш.Шабозов [63–66,69] и многие другие математики.

Пусть X есть пространство C илиL_p, а $X^{(r)}$ есть $C^{(r)}$ или $L_p^{(r)}$ $(C^{(0)}\equiv C$, $L_p^{(0)}\equiv L_p)$. Задача состоит в том, чтобы в неравенстве

$$E_{n-1}(f)_X\le\frac{\chi_r}{n^r}\omega_m\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)_X,$$

указать наименьшую из возможных констант χ_r.

Л.В. Тайков [53] доказал, что для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$, $f\ne const$, при условии $0<nh\le\pi/2$, справедливы равенства

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\ne const}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}}=\left\{\frac{n}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{1/2}. \tag{0.0.3}$$

В втором параграфе доказаны некоторые точные неравенства, содержащие величину наилучшее приближения и усредненные модули непрерывности функции $f\in L_2$, являющиеся в определённом смысле обобщением равенства (0.0.3). Точнее имеет место

Теорема 1.2.1. *Для любого $r\in\mathbb{Z}_+$, $n\in\mathbb{N}$ и $h\in(0,\pi/(2n)]$ справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\ne const}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\Delta^2(f^{(r)},u)du\right)dt\right\}^{1/2}}=\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{1/2}.$$

где $Si(t)=\int\limits_0^t u^{-1}\sin u du$ – интегральный синус.

В качестве следствие теорема 1.2.1 получим следующее утверждение.

Теорема 1.2.2. *В условиях теоремы 1.2.1 имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)du\right)dt\right\}^{1/2}} =$$

$$= \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{1/2},\ 0 < nh \leq \pi/2.$$

Имеет место следующая более общая

Теорема 1.2.3. *Для произвольных* $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ $0 < p \leq 2$ *и любого* $h \in \mathbb{R}_+$, *удовлетворяющего неравенства* $0 < nh \leq \pi/2$, *справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{2n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^p(f^{(r)},u)du\right)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left(\sin\frac{nu}{2}\right)^p du\right)dt\right)^{-1/p}.$$

В параграфе 1.3 рассматривается задача о наилучшем приближении функций $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами в L_2. Вводится осреднён–ная величина

$$W_{m,p,\varphi}(f^{(r)};h) = \left\{\frac{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}\right\}^{1/p},$$

где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$ $\varphi(t) \geq 0$-суммируемая на отрезке $[0,h]$ весовая функция

Н.И.Черных [60] заметил, что при отыскании константы χ в неравенстве типа Джексона-Стечкина (0.0.1) функционал $W_{m,p,\varphi}(f^{(r)};h)$ предпочтительнее джексоновского функционала $\omega_m(f^{(r)};h)$.

В связи с этим, определённый интерес, с нашей точки зрения, представляет изучение следующей экстремальной характеристики

$$\chi_{m,n,r}(h) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)} \\ f\neq const}} \frac{2^{m/2}n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)dt\right)^{m/2}}, \tag{0.0.4}$$

содержащей осреднённый модуль непрерывности m-го порядка с весовой функцией $\varphi(t) := 2(h-t)h^{-2}$, где $0 < t \le h$. Указанная весовая функция при доказательстве нижеприведенной теоремы 1.3.1 естественным образом появляется при установлении неулучшаемых неравенств между наилучшим полиномиальным приближением функции $f \in L_2^{(r)}$ и осреднённым значением модуля непрерывности $\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)$. Ещё одним аргументом в пользу такого выбора весовой функции $\varphi(t) := 2h^{-2}(h-t)$, $(0 < t \le h)$ является недавно опубликованная работа Фокарта, Крякина и Шадрина [59], в которой сделано существенное продвижение в решении задачи о точной константе в неравенстве Джексона-Стечкина в пространстве $C := C[0,2\pi]$. При этом важную роль сыграл указанный вес $\varphi(t) := 2h^{-2}(h-t)$, $(0 < t \le h)$, с помощью которого осреднялась сама конечная разность, а не её норма.

Теорема 1.3.1 *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для любого числа h, удовлетворяющего условию $0 < h \le \pi/n$, справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,r}(h) := \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}.$$

Полученный результат наводит на мысль об обобщении теоремы 1.3.1 с весовой функцией $\varphi(t) = 2(h-t)/h^2$, когда в экстремальной характеристике вместо $\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)$ фигурирует модуль непрерывности в степени p, то есть величина $\omega_m^p(f^{(r)};t)$, $0 < p \le 2$.

С этой целью в параграфе 1.4 в соответствии с обозначением (0.0.4) вводится в рассмотрение следующая экстремальная аппроксимационная характеристика

$$\chi_{m,n,r,p}(h) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)} \\ f^{(r)}\neq const}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h (h-t)\omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}},$$

где $m,n,r\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{R}_+,\ 0<h\le\pi/n.$

Имеет место следующая

Теорема 1.4.1 *Для любых* $m,n,r\in\mathbb{N},\ 0<p\le 2,\ 0<h\le\pi/n$ *справедливы равенства*

$$\chi_{m,n,r,p}(h) = \left(\frac{2}{h^2}\cdot\int_0^h (h-t)\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} dt\right)^{-1/p}.$$

В параграфе 1.5 рассматривается экстремальная характеристика подобной 1.3.1, где вместо весовой функции $\varphi(t) := 2(h-t)h^{-2}$ взята функция $\varphi_*(t) = 2th^{-2}$, $0\le t\le h$. Интересно заметить, что хотя

$$\int_0^h \varphi(t)dt = \int_0^h \varphi_*(t)dt = 1$$

и для обоих весов

$$W_{m,p,\varphi}(f^{(r)};h) \le \omega_m(f^{(r)};h),\ 0<h\le\pi,$$

$$W_{m,p,\varphi_*}(f^{(r)};h) \le \omega_m(f^{(r)};h),\ 0<h\le\pi$$

всё же полученный результат для весовой функции $\varphi_*(t) = 2th^{-2}$, $0\le t\le h$, аналогичной теореме 1.4.1, получается для более узких значений p ($2/r\le p\le 2,\ r\in\mathbb{N},\ \ r\ge 2$), в то время как в теореме 1.4.1 окончательный результат верен при всех $0<p\le 2$.

В самом деле, если ввести экстремальную характеристику следующего вида

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,p}(h) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{2^{m/2}n^rE_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int\limits_0^h t\omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}},$$

где $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+\ p\in\mathbb{R}_+,\ 0<h\leq\pi/n$, то в этом случае имеет место следующее утверждение

Теорема 1.5.1. *Для произвольных $m,n,r\in\mathbb{N},\ 2/r<p\leq 2,\ r\geq 2$ и любой $h\in(0,\pi]$ справедливо равенство*

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,p}(h) = \left\{\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}.$$

Из теоремы 1.5.1. вытекает следующее

Следствие 1.5.1. *В условиях теоремы 1.5.1 при $p=1/m,\ m\in\mathbb{N}$, любых $n\in\mathbb{N},\ r\geq 2,\ r\in\mathbb{N}$ и $0<h\leq\pi/n$ справедливы равенства*

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,1/m}(h) = \frac{1}{2^m}\cdot\left(\frac{nh}{2}\right)^{2m}\cdot\left(\sin\frac{nh}{2}-\frac{nh}{2}\cos\frac{nh}{2}\right)^{-m}.$$

В частности, при $h=\pi/n$, имеем

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,1/m}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m}.$$

Поскольку для функции $f\in L_2^{(r)}$ её последовательные производные $f^{(s)}$ $(s=1,2,...,r-1)$ также принадлежат пространству L_2, то представляет интерес изучить поведение величины наилучших совместных приближений $E_{n-1}(f^{(s)})$ $(s=1,2,...,r-1)$ на указанном классе $L_2^{(r)}$. Эта задача сформулирована и решена для разных классов функций в работе С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [19]. При этом при доказательстве основных утверждений использовалось неравенства типа Колмогорова [33]. Здесь приводим решение этой задачи в рассматриваемом нами случае не базирующееся на неравенство Колмогорова.

Положим

$$\widetilde{\chi}^{*}_{m,n,r,p,s}(h) := \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h t\omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}},$$

где $m,n,r\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{R}_+$, $0<h\le\pi/n$, $s=1,2,...,r-1,r$.

Очевидно, что

$$\widetilde{\chi}^{*}_{m,n,r,p,s}(h) = \widetilde{\chi}_{m,n,r,p}(h).$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.5.2. *Для произвольных* $m,n,r\in\mathbb{N}$, $2/r<p\le 2$, $r\ge 2$; $s=1,2,...,r-1$; *и любой* $h\in(0,\pi]$ *справедливо равенство*

$$\widetilde{\chi}^{*}_{m,n,r,p,s}(h) := \left(\frac{2}{h^2}\cdot\int_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Содержание шестого параграфа первой главы связано с решением некоторых экстремальных задач теории полиномиальных приближений в пространстве L_2. Решение указанных задач для различных конкретных ситуаций требует применения современных методов функционального анализа, основанных на получении некоторого точного неравенства для нормы или какой-либо другой характеристики, например, такой, как верхняя грань наилучшего приближения заданного класса функций.

В экстремальных задачах теории аппроксимации с заданным классом $\mathfrak{M}\subset X$ часто связывают следующие его аппроксимационные характеристики:

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_X := \sup\left\{\inf\left\{\|f-T_{n-1}\|_X : T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}\right\} : f\in\mathfrak{M}\right\} \qquad (0.0.5)$$

— наилучшее приближение класса $\mathfrak{M}$ подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригономет–рических полиномов $T_{n-1}(x)$ порядка $n-1$ размерности $2n-1$

$$\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_X := \sup\left\{\|f\|_X :\ f\in\mathfrak{M}_n^{\perp}\right\}, \qquad (0.0.6)$$

где $\mathfrak{M}_n^{\perp}$ – множество функций $f \in \mathfrak{M}$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(t)\begin{Bmatrix}\sin kt\\ \cos kt\end{Bmatrix} dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1;$$

$$\mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_X = \inf\{\sup\{\|f - Af\|_X : f \in \mathfrak{M}\} : A \in \mathscr{L}_n\}, \tag{0.0.7}$$

где $\mathscr{L}_n$ — совокупность всех линейных операторов, переводящих функции $f \in \mathfrak{M}$ в тригонометрические полиномы $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$.

Из приведённых выше определений для аппроксимационных характеристик (0.0.5) – (0.0.7) сразу следуют соотношения

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$$

Наша цель состоит в отыскании точных значений величины (0.0.5)– – (0.0.7) для некоторых классов функций, естественно возникающих из утверждений теорем 1.2.3, 1.4.1 и 1.5.1.

Для $h \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим следующие классы функций:

$$W_p^{(r)}(\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\int_0^h \frac{1}{t} \left(\int_0^t \omega^p(f^{(r)}, u)_{L_2} du \right) dt \right)^{1/p} \le \Phi(h) \right\},$$

$$W_{m,p}^{(r)}(\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{2}{h^2} \cdot \int_0^h (h-t)\omega_m^p(f^{(r)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \le \Phi(h) \right\},$$

$$\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{2}{h^2} \cdot \int_0^h t\omega_m^p(f^{(r)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \le \Phi(h) \right\}.$$

Для этих классов функций справедливы следующие утверждения

Теорема 1.6.1. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$. *Тогда для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < nh \le \pi$ *справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathscr{E}_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2n^{-r} \cdot \left(\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \left(\sin \frac{nu}{2} \right)^p du \right) dt \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \Phi(h). \qquad (0.0.8)$$

В частности, при $h = \pi/n$, из (0.0.8) следует, что

$$E_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(1+\frac{1}{p})} \cdot n^{-r+\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\sin u)^p du \right) dt \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теорема 1.6.2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$. Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ и $0 < h \leq \pi/n$ справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m} \cdot n^{-r} \cdot \left(\frac{2}{h^2} \cdot \int_0^h (h-t) \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \Phi(h) =$$

$$= 2^{-m} \cdot n^{-r} \cdot \left(\frac{2}{(nh)^2} \cdot \int_0^{nh} (nh-t) \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \Phi(h). \qquad (0.0.9)$$

В частности, при $h = \pi/n$, из (0.0.9) следует, что

$$E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})} \cdot \pi^{\frac{2}{p}} \cdot n^{-r} \cdot \left(\int_0^{\pi} t \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теорема 1.6.3. *Пусть $m, r \in \mathbb{N}$, $2/r < p \leq 2$, $r \geq 2$. Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ и $0 < nh \leq \pi$ справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m} \cdot n^{-r} \cdot \left(\frac{2}{(nh)^2} \cdot \int_0^{nh} t \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \Phi(h). \qquad (0.0.10)$$

В частности, при $h=\pi/n$, из (0.0.10) следует, что

$$E_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2}=\mathcal{E}_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2}=$$

$$=2^{-(m+\frac{1}{p})}\cdot\pi^{\frac{2}{p}}\cdot n^{-r}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi}t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-\frac{1}{p}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

В 1910 году Лебегом [34] было впервые введено понятие модуля непрерывности и в терминах указанной характеристики были получены оценки сверху коэффициентов Фурье. В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах 2π-периодических функций в разное время рассматривались в работах А.В.Ефимова, А.Ф.Тимана, Н.П.Корнейчука, В.И.Бердышева, С.А.Теляковского, С.Милорадовича, А.И.Степанца и многих других (см., например, историю вопроса в монографии [48]).

Полученные результаты в теоремах 1.6.1, 1.6.2 и 1.6.3 можно применить к задаче вычисления верхних граней модулей коэффициентов Фурье на рассматриваемых классах функций.

Теорема 1.6.4. *При выполнении условий теоремы 1.6.1 имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)|:f\in W_p^{(r)}(\Phi)\right\}=\sup\left\{|b_n(f)|:f\in W_p^{(r)}(\Phi)\right\}=$$

$$=2n^{-r}\cdot\left(\int\limits_0^{h}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t}\left(\sin\frac{nu}{2}\right)^{p}du\right)dt\right)^{-\frac{1}{p}}\cdot\Phi(h). \qquad (0.0.11)$$

В частности, при $h=\pi/n$ из (0.0.11) следует, что

$$\sup\left\{|a_n(f)|:f\in W_p^{(r)}(\Phi)\right\}=\sup\left\{|b_n(f)|:f\in W_p^{(r)}(\Phi)\right\}=$$

$$=2^{-(1+\frac{1}{p})}\cdot n^{-r+\frac{1}{p}}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t}(\sin u)^{p}\,du\right)dt\right)^{-\frac{1}{p}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теорема 1.6.5. *При выполнении условий теоремы 1.6.2 имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} =$$

$$= 2^{-m} \cdot n^{-r} \left(\frac{2}{(nh)^2} \int\limits_0^{nh} (nh - t) \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi(h). \qquad (0.0.12)$$

В частности, при $h = \pi/n$ из (0.0.12) следует, что

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})} \cdot \pi^{\frac{2}{p}} \cdot n^{-r} \left(\int\limits_0^{\pi} t \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теорема 1.6.6. *В условиях теоремы 1.6.3 имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} =$$

$$= 2^{-m} n^{-r} \left(\frac{2}{(nh)^2} \int\limits_0^{nh} t \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi(h). \qquad (0.0.13)$$

В частности, при $h = \pi/n$ из (0.0.13) вытекает равенства

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})} \cdot \pi^{\frac{2}{p}} \cdot n^{-r} \left(\int\limits_0^{\pi} t \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Вторая глава диссертационной работы посвящена отысканию точных значений n-поперечников некоторых классов функций, принадлежащих L_2.

В первом параграфе приводятся необходимые определения и факты, нужные нам для изложения дальнейших результатов.

Пуст X – произвольное банахово пространство, $\mathfrak{M} \subset X$ – некоторый класс функций и пусть $L_n \subset X$ – некоторое подпространство заданной размерности n. Величину

$$E_n(\mathfrak{M})_X := E(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup\{E(f, L_n)_X : \ f \in \mathfrak{M}\} =$$
$$= \sup\Big\{ \inf\Big\{ \Big\| f - g \Big\|_X : \ g \in L_n \Big\} : \ f \in \mathfrak{M} \Big\} \qquad (0.0.14)$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{M}$ подпространством L_n заданной размерности n. Величина (0.0.14) характеризует отклонение класса $\mathfrak{M}$ от подпространства L_n в метрике пространства X.

Если обозначить через $\mathcal{L}(X, L_n)$ – множество всех непрерывных операторов $A : \ X \to L_n$, действующих из X в произвольно заданное подпространство $L_n \subset X$ размерности n, то возникает следующая задача: найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$
$$= \inf\Big\{ \sup\Big\{ \Big\| f - Af \Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \Big\} : \ A \in \mathcal{L}(X, L_n) \Big\} \qquad (0.0.15)$$

и указать оператор $A_* \subset \mathcal{L}(X, L_n)$, реализующий точную нижнюю грань в равенстве (0.0.15):

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{ \Big\| f - A_* f \Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \Big\}.$$

Задачу (0.0.15) можно рассматривать в более узком смысле: нижнюю грань искать не по всему множеству $\mathcal{L}(X, L_n)$ непрерывных операторов $A : \ X \to L_n$, а только по некоторому классу таких операторов, которые определяются тем или иным способом задания. В частности, можно выделить в $\mathcal{L}(X, L_n)$ класс линейных непрерывных операторов $A : \ X \to L_n$ и рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$
$$= \inf\Big\{ \sup\Big\{ \Big\| f - Af \Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \Big\} : \ A \subset \mathcal{L}(X, L_n) \Big\}. \qquad (0.0.16)$$

Если существует оператор $A^* : \ X \to L_n$, для которого достигается внешняя нижняя грань в (0.0.16), то такой оператор определяет наилучший линейный метод приближения в задаче (0.0.16), то есть

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\left\{\left\|f - A^*f\right\|_X :\ f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Если же в $\mathcal{L}(X, L_n)$ выделить класс $\mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство L_n, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in L_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\left\{\sup\left\{\left\|f - Af\right\|_X :\ f \in \mathfrak{M}\right\} :\ A \subset \mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)\right\}. \tag{0.0.17}$$

С величинами (0.0.14) – (0.0.17) связана задача отыскания значения n-поперечников для различных классов функций $\mathfrak{M}$.

Напомним определения n-поперечников, значения которых для конкретных классов $\mathfrak{M}$ вычислим в этой главе. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} :\ L_{n+1} \subset X\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{E(\mathfrak{M}, L_n) :\ L_n \subset X\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_X :\ f \in \mathfrak{M} \cap L^n\right\} :\ L^n \subset X\right\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X :\ L_n \subset X\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X :\ L_n \subset X\right\}$$

называют соответсвенно *бернштейновским, колмогоровским, гельфандовс–ким, линейным и проекционным n-поперечниками.*

Указанные аппроксимационные величины монотонно убывают по n и между ними в пространстве L_2 выполняются соотношения [33, 47]:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \le d^n(\mathfrak{M}; L_2) \le d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \lambda_n(\mathfrak{M}; L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}; L_2).$$

Полученные во втором параграф второй главы результаты обеспечивают возможность вычисления точных значений всех перечисленных выше n-поперечников для классов функций $W_2^{(r)}(\Phi)$ и $W_{p,h}^{(r)}$ $(0 < p \le 2,\quad h > 0)$.

Пусть $\Phi(h)$, $h \geq 0$-произвольная возрастающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Определим класс функций

$$W_2^{(r)}(\Phi) = \left\{ f \in L_2 : \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u)_2 du \right) dt \leq \Phi^2(h) \right\},$$

где $h > 0$ и $r \in \mathbb{Z}_+$.

Аналогичном образом, для $h > 0$, $0 < p \leq 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$ определим следующий класс функций:

$$W_p^{(r)} = \left\{ f \in L_2 : \left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^p(f^{(r)}, u)_2 du \right) dt \right)^{1/p} \leq 1 \right\}.$$

Теорема 2.2.1. *Пусть функция $\Phi(h)$ удовлетворяет условиям:*

$$2(nh - Si(nh))\Phi^2(\pi/(2n)) \leq (\pi - 2Si(\pi/2))\Phi^2(h), 0 < h \leq \pi/(2n); \quad (0.0.18)$$

$$(4nh - \pi - 2Si(\pi/2))\Phi^2(\pi/(2n)) \leq (\pi - 2Si(\pi/2)) \cdot \Phi^2(h), h > \pi/(2n). \quad (0.0.19)$$

Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\delta_{2n-1}\left(W_2^{(r)}(\Phi), L_2\right) = \delta_{2n}\left(W_2^{(r)}(\Phi), L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \frac{1}{n^{r-\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ \frac{1}{\pi - 2Si(\pi/2)} \right\}^{1/2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

где $\delta_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ или $\Pi_n(\cdot)$, а величина

$$E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} := \sup\{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_2^{(r)}(\Phi)\}.$$

Множество мажорантных функций $\Phi(h)$, удовлетворяющих условиям (0.0.18) и (0.0.19), не пусто.

Теорема 2.2.2. *Пусть $1/r < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$, $h \in [0, \pi/n]$, $n \in \mathbb{N}$.*

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\delta_{2n-1}\left(W_p^{(r)}, L_2\right) = \delta_{2n}\left(W_p^{(r)}, L_2\right) = E_{n-1}\left(W_p^{(r)}, L_2\right) =$$

$$= 2^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)} n^{-r+\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^{nh} \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t} (\sin u)^p \, du\right) dt\right)^{-1/p}.$$

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.2 при $p = 2$ и $h = \pi/2$ справедливы равенства*

$$\delta_{2n-1}\left(W_2^{(r)}, L_2\right) = \delta_{2n}\left(W_2^{(r)}, L_2\right) = E_{n-1}\left(W_2^{(r)}, L_2\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2} n^{r-\frac{1}{2}}} \cdot (\pi - Si(2\pi))^{-1/2}.$$

В третьем параграфе второй главы вычислены точные значения всех перечисленных выше n-поперечников классов функций, определяемых усреднёнными значениями модуля непрерывности и произвольной неотрицательной не эквивалентной нулю весовой функции. Из полученных общих результатов выведены некоторые следствия для конкретных весовых функций, а также вычислены точные верхние грани модулей абсолютных значений коэффициентов Фурье на указанных классах функций.

$$W_{m,p}^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^{h} (h-t)\omega_m^p(f^{(r)}, t)_{L_2} dt\right)^{1/p} \le \Phi(h) \right\},$$

где $r \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N},\ 0 < p \le 2,\ 0 < h \le 2\pi$ при выполнении некоторых естественных ограничениях на мажоранту Φ.

Имеет место следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$. Если мажоранта Φ при любом $h \in (0, 2\pi]$ удовлетворяет условиям*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge \left(\frac{\pi}{nh}\right)^2 \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} t\,(\cos t)^{mp}\, dt\right)^{-1} \times$$

$$\times \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^{nh/2} \left(\frac{nh}{2} - t\right)(\sin t)^{mp}\, dt, & \text{если } 0 \le h \le \pi/n \\ \displaystyle\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2} t\,(\cos t)^{mp}\, dt + \frac{1}{8}\left(\frac{nh}{\pi} - 1\right)^2, & \text{если } h \ge \pi/n. \end{cases} \qquad (0.0.20)$$

Тогда для любых натуральных n справедливы равенства

$$\delta_{2n-1}\left(W^{(r)}_{m,p}(\Phi), L_2\right) = \delta_{2n}\left(W^{(r)}_{m,p}(\Phi), L_2\right) = E_{n-1}\left(W^{(r)}_{m,p}(\Phi)\right) =$$

$$= 2^{-(m+3/p)} \cdot \pi^{\frac{2}{p}} \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} t(\cos t)^{mp} dt\right)^{-1/p} \cdot n^{-r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\delta_n(\cdot)$ - любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.

Множество мажорант, удовлетворяющих условию (0.0.20), не пусто.

В четвёртом параграфе второй главы рассматривается экстремальная задача отыскания точных значений n-поперечников класса $\widetilde{W}^{(r)}_{m,p}(h,\Phi)$ для функций $f \in L_2^{(r)}$, удовлетворяющих условию

$$\widetilde{W}^{(r)}_{m,p}(\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h t\omega_m^p(f^{(r)}, t)_{L_2} dt \leq \Phi^p(h) \right\},$$

где мажаранта $\Phi(t)$, $t \geq 0$ – непрерывная неубывающая функция, в нуле равная нулю. Основным результата этого параграфа является

Теорема 2.4.1. *Если для всех $\mu > 0$, $m, r \in \mathbb{N}$, $2/r < p \leq 2$, $r \geq 2$ мажоранта Φ для любого $u \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(\mu u)}{\Phi^p(u)} \geq \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{\int\limits_0^{\mu\pi/2} t\left(\sin t\right)_*^{mp} dt}{\int\limits_0^{\pi/2} t\left(\sin t\right)^{mp} dt}, \tag{0.0.21}$$

то для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\delta_{2n-1}\left(\widetilde{W}^{(r)}_{m,p}(\Phi); L_2\right) = \delta_{2n}\left(\widetilde{W}^{(r)}_{m,p}(\Phi); L_2\right) = E_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(r)}_{m,p}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m+3/p)} n^{-r} \left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2} t(\sin t)^{mp} dt\right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Множество мажорант $\{\Phi\}$, удовлетворяющих условию (0.0.21), не пусто.

Следствие 2.4.1. *При любых* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$ *справедливы равенства*

$$\delta_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi_*); L_2\right) = \delta_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi_*); L_2\right) = E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi_*)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m+3/p)} \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^{1/p} \pi^{\alpha/p}\, n^{-r-\alpha/p},$$

где $\delta_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

ГЛАВА I

Наилучшее полиномиальное приближение периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2

§1.1. Обозначения и предварительные факты

1. Всюду далее $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ - множество положительных чисел. Обозначим через $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ пространство 2π-периодических суммируемых с квадратом по Лебегу действительных функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\| \overset{def}{=} \|f\|_{L_2[0,2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть

$$\mathcal{T}_{2n-1} = \left\{T_{n-1}(x) : \, T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right\}$$

— подпространство тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

величина ее наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) \overset{def}{=} \inf\{\|f - T_{n-1}\| : \, T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right\}^{1/2}, \tag{1.1.1}$$

где

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

- частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$, а $\rho_k^2 \overset{def}{=} a_k^2 + b_k^2$, где

$$a_k := a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad b_k := b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

– косинус-и синус-коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Через $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ $(r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} \equiv L_2)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2, тоесть $f^{(r)} \in L_2$.

1.1.1. Модуль непрерывности функций $f \in L_2$

При выяснении структурных характеристик функции $f \in L_2$ ведущую роль играет понятие модуля непрерывности произвольного m-го $(m \in \mathbb{N})$ порядка. Это понятие вводится следующим образом. Для функции $f \in L_2$ вычислим конечную разность m-го порядка

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(x + (m-k)h)$$

с шагом $h > 0$ и вычислим норму этой разности в пространстве L_2 :

$$\|\Delta_h^m f(\cdot)\| = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} |\Delta_h^m f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Равенством

$$\omega_m(f; t) := \sup\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : \ |h| \le t\} \tag{1.1.2}$$

определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$.

Всюду далее структурные свойства функции $f \in L_2$ характеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности m-го порядка r-ой производной $f^{(r)}$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усреднённой величины $\omega_m(f^{(r)}; t)$.

Для определения явного вида модуля непрерывности (1.1.2) после несложных вычислений получим вид конечных разностей m-го порядка функции $f \in L_2$. Для этого сопоставим функцию f её разложение в ряд

Фурье в комплексной форме

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}, \quad c_k = a_k + ib_k.$$

Для производной порядка r отсюда имеем

$$f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^r c_k(f)e^{ikx}.$$

Заметив, что

$$\Delta_h^m(e^{ikx}) = e^{ikx} \cdot (e^{ikh} - 1)^m,$$

для производной $f^{(r)}(x)$ получаем

$$\Delta_h^m(f^{(r)}, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^r c_k \Delta_h^m(e^{ikx}) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^r c_k e^{ikx}(e^{ikh} - 1)^m. \tag{1.1.3}$$

Применяя равенство Парсеваля к соотношению (1.1.3), получаем

$$\|\Delta_h^m(f^{(r)}, \cdot)\|^2 = 2^m \sum_{k=0}^{\infty}(1 - \cos ku)^m k^{2r} \rho_k^2(f), \tag{1.1.4}$$

где $\rho_k^2(f) = |c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2, \ \ k = 0, 1, 2, ...;$. Пользуясь равенствами (1.1.2) и (1.1.4), запишем

$$\omega_m^2(f^{(r)}; t) = 2^m \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \cos ku)^m : \ |u| \le t \right\}. \tag{1.1.5}$$

В последующих параграфах данной работы в качестве экстремальных функ–ций часто выступают функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$ и $g_0(x) = \sin nx \in L_2^{(r)}$, а потому целесообразно вычислить их модуль непрерывности m-го порядка. Из равенства (1.1.5) для этих функций сразу получаем

$$\omega_m^2(f_0^{(r)}; t) := \omega_m^2(g_0^{(r)}; t) = \begin{cases} 2^m n^{2r}(1 - \cos nt)^m, & \text{если } nt \le \pi, \\ 4^m n^{2r}, \ \text{если } nt > \pi. \end{cases}$$

1.1.2. Неравенства типа Джексона-Стечкина

Как мы выше отмечали, под неравенствами Джексона-Стечкина в широком смысле (или неравенствами типа Джексона-Стечкина) понимают соотношения, в которых погрешность приближения $E_{n-1}(f)$ индивидуальной функции в рассматриваемом нормированном пространстве оценивается через модуль непрерывности заданного порядка самой приближаемой функции или некоторой её производной. При этом речь может идти как о наилучшем приближении фиксированным подпространством (например, в нашем случае, подпространство тригонометрических полиномов), так и о приближении конкретным, в частности, линейным методом. Ясно, что от приближаемой функции f требуется только, чтобы модуль непрерывности, через который оценивается погрешность, имел смысл. Параллельно здесь также возникает задача получения неравенств, неулучшаемых на этих широких множествах.

Модуль непрерывности – более тонкая характеристика функции, чем её норма в C или $L_p, (\ 1 \le p < \infty)$, и получение точной константы в неравенствах Джексона-Стечкина требует привлечения более глубоких фактов современной теории функций и функционального анализа.

Основное содержание первой главы настоящей диссертации составляет доказательство точных неравенств типа Джексона-Стечкина для полиномиальной аппроксимации функции $f \in L_2$.

Приводим краткий исторический обзор относительно неравенств Джексона-Стечкина, где получены точные константы.

В 1911 г. Д.Джексон [22] доказал, что для произвольной функции $f \in C$ ($C \overset{def}{=} C[0, 2\pi]$) имеет место следующее неравенство

$$E_{n-1}(f)_C := E(f, \mathcal{T}_{2n-1}) = \inf\left\{\|f(x) - T_{n-1}\|_C : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\} \le$$
$$\le \chi\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_C, \tag{1.1.6}$$

а если $f \in C^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+, C^{(0)} = C)$, то имеет место также неравенство

$$E_{n-1}(f)_C \le \frac{\chi_r}{n^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_C, \ (n \in \mathbb{N}\ r \in \mathbb{Z}_+), \tag{1.1.7}$$

где в неравенстве (1.1.6) константа χ не зависит ни от f, ни от n, а в неравенстве (1.1.7) константа χ_r не зависит от f и n, а зависит только от r.

Для модулей непрерывности $\omega_m(f, \pi/n)_C$ произвольного порядка $m \in \mathbb{N}$ неравенства (1.1.7) были доказаны С.Б.Стечкиным [51].

В метрике $L_p[0, 2\pi]$, $1 \le p < \infty$ аналоги неравенства (1.1.6) и (1.1.7) при $m = 1$ в 1937 г. получил Е.С.Кваде [28]. В дальнейшем, в пространстве $L_p[0, 2\pi]$, $1 \le p < \infty$ С.Б.Стечкин [50] получил неравенство (1.1.7) при $m \ge 2$, а при $m = 2$ этот результат ранее был получен Н.И.Ахиезером [4]. Первые точные неравенства Джексона были получены Н.П.Корнейчуком [30, 32, 33] для пространства $C[0, 2\pi]$ ещё в 1962 г., а для пространства $L_2[0, 2\pi]$ Н.И.Черныхом [60, 61] в 1967 г. В 1979 г. Н.И.Черных получил минимальное значение аргумента в модуле непрерывности, при котором точная константа в неравенстве Джексона-Стечкина в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ выходит на свой глобальный минимум. Нахождение таких аргументов, называемых оптимальными аргументами или точками Черныха, является важной экстремальной задачей. Этой задаче посвящены, например, работы А.Г.Бабенко [5, 6, 8] и В.И.Иванова [26, 27].

После результатов Н.П.Корнейчука и Н.И.Черных появился неослабевающий интерес к получению точных неравенств Джексона–Стечкина и в других банаховых пространствах. В 1992 г. Н.И.Черных [62] доказал точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L_p(-\pi, \pi]$, $1 \le p < 2$. При $p > 2$ эта задача пока остаётся нерешённой.

Позднее этой тематикой занимались В.В.Арестов [1], А.Г.Бабенко [5–9], В.И.Бердышев [11], В.В.Жук [24, 25], В.И.Иванов [26, 27], А.А. Лигун [35–38], Л.В.Тайков [53, 54], В.А.Юдин [71, 72] С.Б.Вакарчук [12–19], В.В.Шалаев [70], С.Н.Васильев [20, 21], Н.А.Барабошкина [10], М.Ш.Шабозов [63–66, 69] и многие другие математики.

Пусть X есть пространство C илиL_p, $(1 \le p < \infty)$, а $X^{(r)}$ есть $C^{(r)}$ или $L_p^{(r)}$ $(C^{(0)} \equiv C,\ L_p^{(0)} \equiv L_p)$. Задача состоит в том, чтобы в неравенстве

$$E_{n-1}(f)_X =$$

$$= \inf \left\{ \|f(x) - T_{n-1}(x)\|_X : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1} \right\} \le \frac{\chi_r}{n^r} \omega \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n} \right)_X \qquad (1.1.8)$$

указать наименьшую из возможных констант χ_r.

Неравенства (1.1.6) – (1.1.8), а также аналогичные им соотношения в других функциональных пространствах известны в теории приближения как неравенства Джексона-Стечкина (см., например, [2] и приведённую там литературу). Они дают оценку скорости сходимости к нулю наилуч– шего приближения тригонометрическими полиномами в зависимости от дифференциально-разностных свойств приближаемой функции. Известно, что наилучшая константа, вообще говоря, может зависеть как от пространства X, так и от чисел m, n и r. Поэтому её обозначают через $\chi_{m,n,r}(\cdots)_X$ и задача сводится к отысканию величины (постоянной):

$$\chi_{n,r}(X; \omega_m; \gamma) = \sup \left\{ \frac{n^r E_{n-1}(f)_X}{\omega_m(f^{(r)}; \gamma/n)_X} : \ f \in X^{(r)}; \ f^{(r)} \ne const \right\}, \qquad (1.1.9)$$

$$(r \in \mathbb{Z}_+, m, n \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{R}_+),$$

где X есть C или L_p $(1 \le p < \infty)$, $\omega_m(f^{(r)}; \gamma/n)$ – модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in X^{(r)}$ а $\gamma \in (0, \pi]$.

В случае приближения функции $f \in X^{(r)}$ с помощью линейных операторов A, отображающих $X^{(r)}$ в подпространстве $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригономет– рических полиномов порядка $n-1$, имеет место аналогичная задача. Ясно, что особый интерес представляет здесь вычисление точной константы, соответствующей наилучшему для $X^{(r)}$ линейному методу, и мы приходим к задаче отыскания величины

$$\chi'_{n,r}(X; \omega_m; \gamma) =$$

$$= \inf \left\{ \sup \left\{ \frac{n^r \|Af - f\|}{\omega_m(f^{(r)}; \gamma/n)_X} : \ f \in X^{(r)}; \ f^{(r)} \ne const \right\} : A : X^{(r)} \to \mathcal{T}_{2n-1} \right\}. \qquad (1.1.10)$$

Так как для любого линейного оператора $A : X^{(r)} \to \mathcal{T}_{2n-1}$ и любой $f \in X^{(r)}$ выполняется соотношение

$$\|Af - f\|_X \ge E_{n-1}(f)_X,$$

то ясно, что всегда

$$\chi'_{m,n,r}(X) \geq \chi_{m,n,r}(X).$$

Наибольший интерес представляет выяснение случаев совпадения этих констант, а также построение наилучших линейных методов, которые реализуют это совпадение. Положим

$$\chi_r(X;\omega_m;\gamma) = \sup\{\chi_{n,r}(X;\omega_m;\gamma) : \ n \in \mathbb{N}\},$$

$$\chi'_r(X;\omega_m;\gamma) = \sup\{\chi'_{n,r}(X;\omega_m;\gamma) : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Н.П.Корнейчук [30] доказал, что

$$1 - \frac{1}{2n} \leq \chi_{n,0}(C,\omega;\pi) \leq 1$$

и, следовательно,

$$\chi_0(C,\omega;\pi) = \sup\{\chi_{n,0}(C\omega;\pi) : \ n \in \mathbb{N}\} = 1.$$

В дальнейшем, обобщая свой результат, Н.П.Корнейчук [33] показал, что для $\gamma = \pi/k$ $(k = 1,2,3,...)$ имеет место неравенство

$$\frac{k+1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \leq \chi_{n,0}\left(C,\omega;\frac{\pi}{k}\right) \leq \frac{k+1}{2},$$

а потому верно соотношение

$$\chi_{0,k} := \sup_{n\in\mathbb{N}} = \chi_{n,0}\left(C,\omega;\frac{\pi}{k}\right) = \frac{k+1}{2}.$$

Также отметим, что, как показал С.Б.Стечкин [50], в пространстве $L_p (p \geq 1)$ имеет место неравенство

$$1 \leq \chi'_0(L_p;\omega,\pi) \leq \frac{3}{2}.$$

Н.И.Черных [60, 61] получил значение точной константы в метрике L_2 :

$$\chi_{n,0}(L_2,\omega;\pi) = \chi'_{n,0}(L_2,\omega;\pi) = 1/\sqrt{2},$$

а в работах В.В.Жука [24, 25] в метрике C установлено, что

$$\chi_{n,1}(C,\omega) = \chi'_{n,1}(C,\omega) = \chi_{n,1}(L,\omega) = \chi'_{n,1}(L,\omega) = \pi/4.$$

А.А.Лигун [35], используя аппарат функций Стеклова, доказал справедливость следующих равенств в равномерной метрике C:

$$\chi_{n,2\nu-1}(C,\omega)=\chi^{'}_{n,2\nu-1}(C,\omega)=\chi_{n,2\nu-1}(L,\omega)=\chi^{'}_{n,2\nu-1}(L,\omega)=\mathcal{K}_{2\nu-1}/2,$$

где

$$\mathcal{K}_r=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}},\ \left(\mathcal{K}_0=1,\ \mathcal{K}_1=\frac{\pi}{2},\ \mathcal{K}_2=\frac{\pi^2}{8},\ \mathcal{K}_3=\frac{\pi^3}{24},...\right)$$

– константы Фавара-Ахиезера-Крейна, причём известно (см, например., [31]), что

$$1=K_0<K_2<...<4/\pi<...<K_3<K_1<\pi/2.$$

Отметим, что в работах [35] и [37] найдены конкретные линейные операторы $A_{n,r}\,:\,X^{(2\nu-1)}\to\mathcal{T}_{2n-1}$, реализующие в соотношении (1.1.9) и (1.1.10) указанные константы. В 1985 г. А.А.Лигун [37] доказал, что если $p=1,\ \infty;\ r=1,3,5,...$ и $\mathfrak{N}$ - произвольное подпространство из L_p, то при всех $\delta\geq\pi a_{r+1}(p)$, где $a_r(p)=(\mathcal{K}_r^{-1}E_{n-1}(W_p^{(r)},\mathfrak{N})_p)^{1/r}$ выполняется неравенство

$$\frac{\mathcal{K}_r}{2}a_r^r(p)\leq\chi_{n,r}(L_p,\omega;\delta)\leq\frac{\mathcal{K}_r}{2}a_{r+1}^r(p).$$

Здесь, как обычно,

$$E_{n-1}(W_p^{(r)},\mathfrak{N})_p=\sup\{E_{n-1}(f,\mathfrak{N})_p:\ f\in W_p^{(r)}\}.$$

В докладе на международной конференции по теории приближения функций в 1983 г. (г. Киев) Н.И.Черных сообщил, что

$$\chi_{n,0}(L_p;\omega;2\pi)=2^{(1-p)/p},\ 1\leq p\leq 2,\ n\in\mathbb{N}.$$

Л.В.Тайков [53] нашёл, в частности, асимптотическое поведение $\chi_{n,0}(L_2;\omega;\tau)$ при $\tau\to 0$, получив оценки

$$\left(\frac{1}{2(1-\cos\tau)}\right)^{1/2}\leq\chi_{n,0}(L_2;\omega;\tau)\leq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\tau^2}\right)^{1/2},\ n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+\quad(1.1.11)$$

для $0<\tau\leq\pi$. Левую оценку в (1.1.11) реализует функция $f_1(x)=\cos nx$.

В заметке А.Г.Бабенко [5] с помощью соображений, подобных тем, которые применял Н.И.Черных [60], вычислена константа $\chi_{n,0}(L_2;\omega;\tau)$ при любых τ, а именно доказано, что для $\tau=\pi/\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$, где $\nu\geq 1+3n/2\ \ n\in\mathbb{N}$, имеет место равенство

$$\chi_{n,0}(L_2;\omega;\tau)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(\tau/2)-1/2}{\tau\sin(\tau/2)}\right)^{1/2},\ n\in\mathbb{N}.$$

С.Б.Вакарчук [15] распространил результат Л.В.Тайкова [53] для модулей непрерывности m-го порядка и доказал, что при $\tau\to 0$ неравенства

$$\left(\frac{1}{2(1-\cos\tau)}\right)^{m/2}\leq\chi_{n,0}(L_2;\omega_m;\tau)\leq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\tau^2}\right)^{m/2},$$

$$m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+.$$

§1.2. Об одном аналоге результата Л.В.Тайкова

Модуль непрерывности произвольной 2π-периодической измеримой и суммируемой с квадратом функции $f \in L_2$ определим равенством

$$\omega(f;t) = \sup\Big\{\|\Delta(f,h)\| : |h| \le t\Big\} = \sup\Big\{\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_2 : \ |h| \le \ t\Big\}.$$

Л.В.Тайков [53] доказал, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, $f \neq const$, при условии $0 < nh \le \pi/2$, справедливы равенства

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - \sin nh)}\right\}^{1/2}. \qquad (1.2.1)$$

В данном параграфе доказаны некоторые точные неравенства, содержащие величину наилучшего приближения и усредненные значения разности первого порядка функции $f \in L_2$, являющиеся в определённом смысле обобщением равенства (1.2.1). Имеет место

Теорема 1.2.1. *Для любого $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$ и $h \in (0, \pi/(2n)]$ справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Delta^2(f^{(r)},u)du\right)dt\right\}^{1/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{1/2}, \qquad (1.2.2)$$

где $Si(t) = \int\limits_0^t u^{-1}\sin u du$ *– интегральный синус.*

Доказательство. Без ограничения общности можно ограничиться функциями $f(x)$, которые ортогональны всем полиномам $T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$:

$$f(x) \sim \sum_{k=n}^{\infty} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right).$$

Тогда

$$\Delta^2(f,h) = \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|^2 \ge$$

$$\geq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \left(2 \sin \frac{kh}{2}\right)^2 = 2E_{n-1}^2(f) - 2 \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \cos kh.$$

Интегрируя полученное равенство по h, $0 < h \leq t$, получим

$$2t \cdot E_{n-1}^2(f) \leq 2 \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cdot \frac{1}{k} \sin kt + \int\limits_0^t \Delta^2(f, h) dh,$$

откуда разделив обе части на $2t$, находим

$$E_{n-1}^2(f) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cdot \frac{\sin kt}{kt} + \frac{1}{2t} \int\limits_0^t \Delta^2(f, u) du.$$

Интегрируя последнее неравенство по t в пределах от 0 до h и поделив обе части полученного соотношения на h, будем иметь

$$E_{n-1}^2(f) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cdot \frac{Si(kh)}{kh} + \frac{1}{2h} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \Delta^2(f, u) du \right) dt. \tag{1.2.3}$$

Поскольку $0 < nh \leq \pi/2$, то имеем:

$$\max_{u \geq nh} \left| \frac{Si(u)}{u} \right| = \frac{Si(nh)}{nh}, \quad 0 < nh \leq \pi/2,$$

а потому из (1.2.3) приходим к неравенству

$$E_{n-1}^2(f) \leq \frac{Si(nh)}{nh} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) + \frac{1}{2h} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \Delta^2(f, u) du \right) dt$$

или, что то же

$$E_{n-1}^2(f) \leq \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-1} \cdot \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \Delta^2(f, u) du \right) dt. \tag{1.2.4}$$

Если учесть, что для $f \in L_2^{(r)}$, $\Delta^2(f, u) \leq n^{-2r} \Delta^2(f^{(r)}, u)$, $0 \leq u \leq t$, то неравенство (1.2.4) приобретает вид

$$E_{n-1}(f) \leq \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r} \left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \Delta^2(f^{(r)}, u) du \right) dt \right)^{1/2}, \tag*{(1.2.4)$'$}$$

откуда

$$\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Delta^2(f^{(r)},u)du\right)dt\right)^{1/2}} \le \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{1/2}. \qquad (1.2.5)$$

Так как неравенство (1.2.5) справедливо для любого $f \in L_2^{(r)}$, то, переходя к верхним граням по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$, мы получим оценку сверху для величины, стоящей в левой части равенства (1.2.2):

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Delta^2(f^{(r)},u)du\right)dt\right\}^{1/2}} \le \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{1/2}. \qquad (1.2.6)$$

Для получения оценки снизу, равную величину в правой части неравенства (1.2.6) рассмотрим функцию $f_0 = \cos nx \in L_2^{(r)}$. Для этой функции, как легко проверить,

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \Delta^2(f_0^{(r)},u) = 2n^{2r}(1-\cos nu),$$

$$\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Delta^2(f^{(r)},u)du\right)dt = 2n^{2r}h\left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right) \quad 0 < nh \le \pi/2.$$

Следовательно, справедлива следующая оценка снизу

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Delta^2(f^{(r)},u)du\right)dt\right\}^{1/2}} \ge \frac{n^r E_{n-1}(f_0)}{\left\{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Delta^2(f_0^{(r)},u)du\right)dt\right\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{n^r}{n^r\left(2h\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)\right)^{1/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{1/2}. \qquad (1.2.7)$$

Требуемое равенство (1.2.2) получим из сопоставления неравенств (1.2.6) и (1.2.7), чем и завершим доказательство теоремы 1.2.1. Из доказанной теоремы в качестве следствия получим следующее утверждение

Теорема 1.2.2. *В условиях теоремы 1.2.1 имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)du\right)dt\right\}^{1/2}} =$$

$$= \left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{1/2},\ 0<nh\le\pi/2.$$

Доказательство. Так как для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, $\Delta^2(f^{(r)},u)\le\omega^2(f^{(r)},u)\ 0\le u\le t$, то из неравенства $(1.2.4)'$ следует, что

$$E_{n-1}(f)\le\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{n^r}\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega^2(f^{(r)},u)du\right)dt\right)^{1/2},$$

что легко проверить для функции $f_0(x)=\cos nx$, в силу равенств

$$E_{n-1}(f_0)=1,\quad \omega^2(f_0^{(r)},t)=2n^{2r}(1-\cos nt),\quad 0<nt\le\pi/2,$$

обращается в равенство, чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.2.

Представляет интерес доказать теорему 1.2.2 в более общем случае. Имеет место следующая

Теорема 1.2.3. *Для произвольных* $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ $0<p\le 2$ *и любого* $h\in\mathbb{R}_+$, *удовлетворяющего неравенство* $0<nh\le\pi/2$, *справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{2n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^p(f^{(r)},u)du\right)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left(\sin\frac{nu}{2}\right)^p du\right)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.2.8)$$

Доказательство. Будем пользоваться одним вариантом неравенства

Минковского, приведённого, например, в монографии [47]

$$\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(u)|^2\right)^{p/2}du\right)^{1/p}\geq\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|f_k(u)|^pdu\right)^{2/p}\right)^{1/2},0<p\leq 2. \tag{1.2.9}$$

Возведя обе части неравенства (1.2.9) в степень p $(0<p\leq 2)$, запишем

$$\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(u)|^2\right)^{p/2}du\geq\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|f_k(u)|^pdu\right)^{2/p}\right)^{p/2}. \tag{1.2.10}$$

Применяя неравенство (1.2.10) к внутреннему интегралу в двойном интеграле

$$\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega^p(f^{(r)},u)du\right)dt\right)^{1/p} \qquad (1.2.11),$$

с учётом соотношения

$$\omega^2\Big(f^{(r)},t\Big)=2\sup_{u\leq t}\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)(1-\cos ku)$$

будем иметь

$$\int\limits_0^t\omega^p(f^{(r)},u)du\geq\int\limits_0^t\left[2\sum_{k=n}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)(1-\cos ku)\right]^{p/2}du\geq$$

$$\geq 2^{p/2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^t\Big[k^{rp}\rho_k^p(f)(1-\cos ku)^{p/2}du\Big]\right)^{2/p}\right)^{p/2}=$$

$$=2^{p/2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\left[k^{rp}\int\limits_0^t(1-\cos ku)^{p/2}du\right]^{2/p}\right)^{p/2}. \tag{1.2.12}$$

В работе [15] в частности, доказано, что функция натурального аргумента

$$\varphi(k)=k^{rp}\int\limits_0^t(1-\cos ku)^{p/2}du$$

при указанных в формулировке теоремы 1.2.2 значениях r и p в области

$$Q = \{k: \ k \geq n, \ k, n \in \mathbb{N}\}$$

минимальное значение принимает при $k = n$:

$$\min\{\varphi(k): \ k \in Q\} = \varphi(n) = n^{rp} \int\limits_0^t (1 - \cos nu)^{p/2} du =$$

$$= 2^{p/2} n^{rp} \int\limits_0^t \left(\sin \frac{nu}{2}\right)^p du. \qquad (1.2.13)$$

Поэтому, учитывая равенство (1.2.13), из (1.2.12) получаем

$$\int\limits_0^t \omega^p(f^{(r)}, u) du \geq 2^p \cdot n^{rp} \cdot \int\limits_0^t \left(\sin \frac{nu}{2}\right)^p du \cdot \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{p/2} =$$

$$= 2^p \cdot n^{rp} \cdot \int\limits_0^t \left(\sin \frac{nu}{2}\right)^p du \cdot (E_{n-1}(f))^p. \qquad (1.2.14)$$

Подставляя вместо внутреннего интеграла в (1.2.11) его оценку снизу, из неравенства (1.2.14) будем иметь

$$\left(\int\limits_0^h \frac{1}{t} \left(\int\limits_0^t \omega^p(f^{(r)}, u) du\right) dt\right)^{1/p} \geq$$

$$\geq 2 \cdot n^r \cdot \left(\int\limits_0^h \frac{1}{t} \left(\int\limits_0^t \left(\sin \frac{nu}{2}\right)^p du\right) dt\right)^{1/p} \cdot E_{n-1}(f). \qquad (1.2.15)$$

Так как неравенство (1.2.15) имеет место для произвольной функций $f \in L_2^{(r)}$, то для величины, стоящей в левой части равенства (1.2.8), запишем оценку сверху

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{2n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \frac{1}{t} \left(\int\limits_0^t \omega^p(f^{(r)}, u) du\right) dt\right)^{1/p}} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^h \frac{1}{t}\left(\int_0^t \left(\sin\frac{nu}{2}\right)^p du\right) dt\right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{1.2.16}$$

С целью получения оценки снизу указанной величины заметим, что для рассмотренной в конце теоремы 1.2.2 функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$ имеем:

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \omega^p(f_0^{(r)}, u) = 2^p \cdot n^{pr} \cdot \left(\sin\frac{nu}{2}\right)^p,$$

$$\left(\int_0^h \frac{1}{t}\left(\int_0^t \omega^p(f_0^{(r)}, u)du\right) dt\right)^{1/p} = 2n^r \left(\int_0^h \frac{1}{t}\left(\int_0^t \left(\sin\frac{nu}{2}\right)^p du\right) dt\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{2n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \frac{1}{t}\left(\int_0^t \omega^p(f^{(r)}, u)du\right) dt\right)^{1/p}} \geq$$

$$\geq \frac{2n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h \frac{1}{t}\left(\int_0^t \omega^p(f_0^{(r)}, u)du\right) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{2n^r \cdot 1}{2n^r \left(\int_0^h \frac{1}{t}\left(\int_0^t \left(\sin\frac{nu}{2}\right)^p du\right) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int_0^h \frac{1}{t}\left(\int_0^t \left(\sin\frac{nu}{2}\right)^p du\right) dt\right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{1.2.17}$$

Требуемое равенство (1.2.8) вытекает из сопоставления оценки сверху (1.2.16) с оценкой снизу (1.2.17). Теоремы 1.2.2 доказана.

§1.3. Наилучшее приближение функций $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами в L_2

Если ввести в рассмотрение осреднённую величину

$$W_{m,p,\varphi}(f^{(r)}; h) = \left\{ \frac{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt} \right\}^{1/p},$$

то в связи с тем, что $\omega_m(f^{(r)}; t)$ является монотонно возрастающей функцией на отрезке $(0, h]$ $(0 < h \le \pi/n)$, то какой бы не была суммируемая весовая функция $\varphi(t) \ge 0$ $(0 \le t \le h)$, имеет место неравенство

$$W_{m,p,\varphi}(f^{(r)}; h) \le \omega_m(f^{(r)}; h).$$

Н.И.Черных [60] заметил, что при отыскании константы χ в неравенстве типа Джексона-Стечкина (1.1.6) функционал $W_{m,p,\varphi}(f^{(r)}; h)$ предпочтительнее джексоновского функционала $\omega_m(f^{(r)}; h)$.

В связи со сказанным, определённый интерес, с нашей точки зрения, представляет изучение следующей экстремальной характеристики

$$\chi_{m,n,r}(h) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \ne const}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)dt \right)^{m/2}}, \tag{1.3.1}$$

содержащей осреднённый модуль непрерывности m-го порядка с весовой функцией $\varphi(t) := 2(h-t)h^{-2}$, где $0 < t \le h$. Указанная весовая функция при доказательстве нижеприведенной теоремы 1.3.1 естественным образом появляется при установлении неулучшаемых неравенств между наилучшим полиномиальным приближением функции $f \in L_2^{(r)}$ и осреднённым значением модуля непрерывности $\omega_m^{2/m}(f^{(r)}; t)$. Ещё одним аргументом в пользу такого выбора весовой функции $\varphi(t) := 2h^{-2}(h-t)$, $(0 < t \le h)$ является недавно опубликованная работа Фокарта, Крякина и Шадрина [59], в которой сделано существенное продвижение в решении задачи о точной константе в неравенстве Джексона-Стечкина в пространстве $C := C[0, 2\pi]$. При этом важную роль сыграл указанный вес $\varphi(t) := 2h^{-2}(h-t)$, $(0 < t \leq h)$, с помощью которого осреднялась сама конечная разность, а не её норма.

Теорема 1.3.1 *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда для любого числа* h, *удовлетворяющего условию* $0 < h \leq \pi/n$, *справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,r}(h) := \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{1.3.2}$$

Доказательство. В предыдущем параграфе мы показали, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место равенство

$$\|\triangle_t^m f^{(r)}(\cdot)\| = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f)(1-\cos kt)^m.$$

Применяя неравенство Гёльдера для сумм в правой части соотношения

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\cos kt = \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)(1-\cos kt) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^{2-2/m}(f)\,\rho_k^{2/m}(f)(1-\cos kt)$$

и используя определение модуля непрерывности m-го порядка, имеем

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\cos kt \leq$$

$$\leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)\left\{\frac{1}{n^{2r}}\sum_{k=n}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)(1-\cos kt)^m\right\}^{1/m} \leq$$

$$\leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)\frac{1}{2n^{2r/m}}\|\triangle_t^m(f^{(r)})\|^{2/m} \leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)\frac{1}{2n^{2r/m}}\,\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t).$$

Интегрируя полученное неравенство по переменной t от 0 до τ, получаем

$$\tau E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\frac{\sin k\tau}{k} \leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)\frac{1}{2n^{2r/m}}\int_0^{\tau}\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)dt. \tag{1.3.3}$$

Повторно интегрируя неравенство (1.3.3) по переменной τ от $\tau = 0$ до $\tau = h$, будем иметь

$$\frac{h^2}{2}E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\frac{1-\cos kh}{k^2} \le E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)\frac{1}{2n^{2r/m}}\int_0^h\int_0^\tau \omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)dtd\tau. \tag{1.3.4}$$

Теперь, воспользуясь равенством

$$\int_0^h\int_0^\tau \omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)dtd\tau = \int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)\,dt,$$

неравенство (1.3.4) запишем в следующем виде

$$\frac{h^2}{2}E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\frac{1-\cos kh}{k^2} \le$$

$$\le E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)\,\frac{1}{2n^{2r/m}}\int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)\,dt. \tag{1.3.5}$$

Поделив обе части неравенства (1.3.5) на $h^2/2$ и воспользуясь тем, что

$$\sup\left\{\frac{2(1-\cos kh)}{k^2}:\ n \le k < \infty\right\} = \left(\frac{2}{nh}\,\sin\frac{nh}{2}\right)^2,$$

из неравенства (1.3.5) получаем

$$E_{n-1}^2(f) \le \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2 E_{n-1}^2(f) +$$

$$+E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)\,\frac{1}{2n^{2r/m}}\left(\frac{2}{h^2}\int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)dt\right).$$

Отсюда

$$\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}E_{n-1}^{2/m}(f) \le \frac{1}{2n^{2r/m}}\left(\frac{2}{h^2}\int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)dt\right)$$

или, что то же,

$$E_{n-1}(f) \le \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}\cdot\frac{1}{2^{m/2}n^r}\left(\frac{2}{h^2}\int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)dt\right)^{m/2}.$$

Из последнего неравенства для произвольной $f \in L_2^{(r)}$ имеем:

$$\frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)dt\right)^{m/2}} \leq \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{1.3.6}$$

Теперь, пользуясь соотношениями (1.3.1) и (1.3.6), получаем оценку сверху экстремальной характеристики

$$\chi_{m,n,r}(h) \leq \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{1.3.7}$$

Для получения оценки снизу величины (1.3.1) рассмотрим функцию $f_0(x) = \cos nx$, принадлежащую множеству L_2. Поскольку

$$E_{n-1}(f_0) = 1,$$

$$\omega_m^2(f_0^{(r)};t) = 2^m n^r \sin^m(nt/2),\ 0 \leq t \leq \pi/n,$$

то путём непосредственного подсчёта получаем

$$\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f_0^{(r)};t)dt\right)^{m/2} = 2^{m/2}n^r\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{m/2}.$$

Отсюда с учётом формулы (1.3.1) имеем

$$\chi_{m,n,r}(h) \geq \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f_0^{(r)},t)dt\right)^{m/2}} = \frac{2^{m/2}n^r}{2^{m/2}n^r\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{m/2}} =$$

$$= \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{1.3.8}$$

Сопоставляя оценку сверху (1.3.7) и оценку снизу (1.3.8), получаем требуемое равенство (1.3.2), чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.1

Следствие 1.3.1 *В условиях теоремы 1.3.1 при $h = \pi/n$ имеет место равенство*

$$\chi_{m,n,r}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right\}^{m/2}.$$

§1.4. Обобщение результатов предыдущего параграфа

Полученный в предыдущем параграфе результат наводит на мысль обобщить теорему 1.3.1 с весовой функцией $\varphi(t) = 2(h-t)/h^2$, когда в экстремальной характеристике вместо $\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)$ фигурирует модуль непрерывности в степени p, то есть величина $\omega_m^p(f^{(r)};t)$, $0 < p \leq 2$.

С этой целью, в соответствии с обозначением (1.3.1), введём в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\chi_{m,n,r,p}(h) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{2^{m/2}n^r E_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h (h-t)\omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}}, \tag{1.4.1}$$

где $m,n,r \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq \pi/n$.

Целью данного обобщения является распространение результата теоремы 1.3.1 на более общий случай и использование полученных результатов для вычисления точных значений различных n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых модулями непрерывности в L_2. При этом структурные свойства функции $f \in L_2$ охарактеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(r)},t)$ r-й производной $f^{(r)}(x)$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усредненной величины $\omega_m(f^{(r)},t)$ с заданным весом $\varphi(t) = 2(h-t)/h^2$, $0 \leq t \leq h,\ h > 0$.

Имеет место следующая

Теорема 1.4.1 *Для любых $m,n,r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$ справедливы равенства*

$$\chi_{m,n,r,p}(h) = \left(\frac{2}{h^2}\cdot\int_0^h (h-t)\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} dt\right)^{-1/p}. \tag{1.4.2}$$

Доказательство. Воспользуемся следующим упрощенным вариантом неравенства Минковского, приведённого в монографии А.Пинкуса [47]

$$\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}\ge\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|f_k(t)|^p dt\right)^{2/p}dt\right)^{1/2},$$

$$(0<p\le 2,\ h>0)$$

и, имея в виду, что для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ имеет место соотношение

$$\omega_m^2(f^{(r)},t)=2^m\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(1-\cos ku)^m:|u|\le t\right\}\ge$$

$$\ge 2^m\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(1-\cos kt)^m,$$

получаем

$$\left(\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h(h-t)\omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}\ge$$

$$\ge\left(\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h(h-t)\cdot\left\{2^m\sum_{k=n}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(1-\cos kt)^m\right\}^{p/2}dt\right)^{1/p}\ge$$

$$\ge 2^{m/2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\cdot\left\{\frac{2k^{rp}}{h^2}\cdot\int\limits_0^h(h-t)(1-\cos kt)^{mp/2}dt\right\}^{2/p}\right)^{1/2}. \qquad (1.4.3)$$

Положим

$$\psi(y):=\frac{2y^{rp}}{h^2}\cdot\int\limits_0^h(h-t)(1-\cos yt)^{mp/2}dt. \qquad (1.4.4)$$

В работе [64] доказано, что если весовая функция $\varphi(t)$, заданная на отрезке $[0,h]$, является неотрицательной, непрерывно-дифференцируемой и при любых $0<p\le 2$ и $t\in[0,h]$ выполнено дифференциальное неравенство

$$(rp-1)\varphi(t)-t\varphi^{'}(t)\ge 0,$$

то для функции

$$F(y) := \frac{2y^{rp}}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (1-\cos yt)^{mp/2}\varphi(t)dt$$

выполняется соотношение $\inf\{F(y) : y \geq n\} = F(n)$.

Для весовой функции

$$\varphi(t) = 2(h-t)/h^2, \quad 0 \leq t \leq h$$

имеем

$$(rp-1)\varphi(t) - t\varphi^{'}(t) = 2(rp-1)(h-t)/h^2 + 2t/h^2 \geq 0$$

и, следовательно, для функции $\psi(y)$, определенной равенством (1.4.4), получаем

$$\inf\{\psi(y) :\ y \geq n\} = \psi(n) = n^{rp}\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (h-t)(1-\cos nt)^{mp/2}dt.$$

С учётом последнего соотношения и равенства (1.1.1) из неравенства (1.4.3) сразу следует, что

$$\left(\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (h-t)\omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p} \geq$$

$$\geq 2^{m/2} \cdot n^r \cdot \left(\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (h-t)(1-\cos nt)^{mp/2}dt\right)^{1/p} \cdot \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right\}^{1/2} =$$

$$= 2^m \cdot n^r \cdot \left(\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (h-t)\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} dt\right)^{1/p} \cdot E_{n-1}(f),$$

откуда получаем

$$E_{n-1}(f) \leq 2^{-m} \cdot n^{-r} \cdot \left(\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (h-t)\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} dt\right)^{-1/p} \times$$

$$\times \left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\omega_m^p(f^{(r)}, t)dt \right)^{1/p}.$$

Из последнего неравенства для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеем соотношение

$$\frac{2^m n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (h-t)\omega_m^p(f^{(r)}, t)dt \right)^{1/p}} \le \left(\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (h-t) \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p}. \tag{1.4.5}$$

Из (1.4.5) сразу следует оценка сверху для величины (1.4.1):

$$\chi_{m,n,r,p}(h) \le \left(\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (h-t) \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p}. \tag{1.4.6}$$

Чтобы доказать равенство (1.4.2), достаточно рассмотреть функцию $f_0(x) = \cos nx \in L_2$, воспользоваться определением величины (1.4.1), а также ранее использованными соотношениями

$$E_{n-1}(f_0) = 1,$$

$$\omega_m(f_0^{(r)}, t) = 2^m n^r \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^m, \; 0 < nt \le \pi.$$

В самом деле, из (1.4.1) имеем:

$$\chi_{m,n,r,p}(h) \ge \frac{2^m n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (h-t)\omega_m^p(f_0^{(r)}, t)dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (h-t) \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p}. \tag{1.4.7}$$

Утверждение теоремы 1.4.1 следует из сопоставления неравенств (1.4.6) и (1.4.7). Очевидно, что интеграл, стоящий в правой части (1.4.7), после упрощения можно записать в следующем виде

$$\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h (h-t)\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt =$$

$$= \frac{8}{(nh)^2}\cdot\int\limits_0^{nh/2}\left(\frac{nh}{2}-t\right)(\sin t)^{mp}\,dt.$$

Таким образом, равенство (1.4.2) в утверждении теоремы 1.4.1 приобретает вид

$$\chi_{m,n,r,p}(h) = \left(\frac{8}{(nh)^2}\cdot\int\limits_0^{nh/2}\left(\frac{nh}{2}-t\right)(\sin t)^{mp}\,dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.4.8)$$

Из равенства (1.4.8), в частности, при $h=\pi/n$ получаем

$$\chi_{m,n,r,p}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left(\frac{8}{\pi^2}\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(\sin t)^{mp}\,dt\right)^{-1/p}$$

$$= \left(\frac{8}{\pi^2}\cdot\int\limits_0^{\pi/2} t(\cos t)^{mp}dt\right)^{-1/p}.$$

§1.5. Об экстремальной аппраксимационной характеристике с весовой функции $\varphi_*(t) = 2th^{-2}$

Интересно отметить, что если вместо весовой функции $\varphi(t) := 2(h-t)h^{-2}$, $0 \le t \le h$, в экстремальную характеристику (1.4.2) ввести в рассмотрение весовую функцию $\varphi_*(t) = 2th^{-2}$, $0 \le t \le h$, то очевидно

$$\int\limits_0^h \varphi(t)dt = \int\limits_0^h \varphi_*(t)dt = 1,$$

а потому условия Черныха для обеих весовых функций φ и φ_* выполняется:

$$W_{m,p,\varphi}(f^{(r)};h) \le \omega_m(f^{(r)};h),\ 0 < h \le \pi,$$

$$W_{m,p,\varphi_*}(f^{(r)};h) \le \omega_m(f^{(r)};h),\ 0 < h \le \pi,$$

но результат для весовой функции $\varphi_*(t) = 2th^{-2}$, $0 \le t \le h$, аналогичный теореме 1.4.1, получается при более обременительных ограничениях относительно параметра p $(2/r \le p \le 2,\ r \in \mathbb{N})$, в то же время, как и в теореме 1.4.1 окончательный результат верен при всех $0 < p \le 2$. В самом деле, если ввести экстремальную характеристику следующего вида

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,p}(h) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \ne const}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2} \displaystyle\int\limits_0^h t\omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}}, \tag{1.5.1}$$

где $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+\ p \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \le \pi/n$, то в этом случае имеет место следующее утверждение

Теорема 1.5.1. *Для произвольных* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $2/r < p \le 2$, $r \ge 2$ *и любой* $h \in (0, \pi]$ *справедливо равенство*

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,p}(h) = \left\{\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} dt\right\}^{-1/p}. \tag{1.5.2}$$

Доказательство. В самом деле, применив схему доказательства теоремы 1.5.1, имеем:

$$\left(\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h t\,\omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}\geq$$

$$\geq 2^{m/2}\cdot\left(\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\cdot\left[k^{rp}\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h t(1-\cos kt)^{mp/2}dt\right]^{2/p}\right)^{1/2}. \tag{1.5.3}$$

Полагаем

$$\psi(y):=\frac{2y^{rp}}{h^2}\cdot\int\limits_0^h t(1-\cos yt)^{mp/2}dt$$

для весовой функции $\varphi_*(t):=2th^{-2},\ 0\leq t\leq h$ имеем:

$$(rp-1)\varphi_*(t)-t\varphi_*'(t)=(rp-1)2th^{-2}-2th^{-2}=2t/h^{-2}\cdot(rp-2)\geq 0,$$

если $p\geq 2/r,\ r\geq 2,\ r\in\mathbb{N}$, и, следовательно, при выполнении указанных условий имеет место равенство

$$\inf\{\psi(y):\ y\geq n\}=\psi(n)=n^{rp}\cdot\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t(1-\cos nt)^{mp/2}dt.$$

С учётом последнего соотношения и равенства (1.1.1), из неравенства (1.5.3) сразу следует, что

$$\left(\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h t\,\omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}\geq$$

$$\geq 2^{m/2}\cdot n^r\cdot\left(\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h t(1-\cos nt)^{mp/2}dt\right)^{1/p}\cdot\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\right\}^{1/2}=$$

$$=2^m\cdot n^r\cdot\left(\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right)^{1/p}\cdot E_{n-1}(f),$$

откуда для произвольной $f\in L_2^{(r)}$ имеем:

$$\frac{2^m n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h t\,\omega_m^p(f^{(r)};t)dt\right)^{1/p}}\le\left(\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right)^{1/p}. \qquad (1.5.4)$$

Из (1.5.4) следует оценка сверху для величины (1.5.1):

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,p}(h)\le\left(\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.5.5)$$

Чтобы доказать равенство (1.5.2), достаточно рассмотреть функцию $g_0(x)=\sin nx\in L_2$, воспользоваться определением величины $\chi_{m,n,r,p}(h)$, а также легко проверяемыми соотношениями

$$E_{n-1}(g_0)=1,\ \omega_m(g_0^{(r)};t)=2^m n^r\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^m,\ 0<nt\le\pi. \qquad (1.5.6)$$

В самом деле, благодаря (1.5.6) имеем:

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,p}(h)\ge\frac{2^m n^r E_{n-1}(g_0)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,\omega_m^p(g_0^{(r)},t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.5.7)$$

Утверждение теоремы 1.5.1 следует из сопоставления неравенств (1.5.5) и (1.5.7). Из теоремы 1.5.1. вытекает следующее

Следствие 1.5.1. *В условиях теоремы 1.5.1 при $p=1/m,\ m\in\mathbb{N}$, любых $n\in\mathbb{N},\ r\ge 2,\ r\in\mathbb{N}$ и $0<h\le\pi/n$ справедливы равенства*

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,1/m}(h)=\frac{1}{2^m}\cdot\left(\frac{nh}{2}\right)^{2m}\cdot\left(\sin\frac{nh}{2}-\frac{nh}{2}\cos\frac{nh}{2}\right)^{-m}.$$

В частности, при $h=\pi/n$, имеем

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,1/m}\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m}.$$

Поскольку для функции $f \in L_2^{(r)}$ её последовательные производные $f^{(s)}$ $(s = 1, 2, ..., r-1)$ также принадлежат пространству L_2, то представляет интерес изучить поведение величины наилучших совместных приближений $E_{n-1}(f^{(s)})$ $(s = 1, 2, ..., r-1)$ на указанном классе $L_2^{(r)}$. Эта задача сформулирована и решена на разных классах функций в работе С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [19]. При этом при доказательстве основных утверждений использовалось неравенство типа Колмогорова [33]. Здесь приводим решение этой задачи в рассматриваемом нами случае, не базирующееся на неравенство Колмогорова.

Положим

$$\widetilde{\chi}^{*}_{m,n,r,p,s}(h) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h t\omega_m^p(f^{(r)}, t)dt\right)^{1/p}}, \tag{1.5.8}$$

где $m, n, r \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{R}_+,\ 0 < h \le \pi/n,\ s = 1, 2, ..., r-1, r.$

Очевидно, что

$$\widetilde{\chi}^{*}_{m,n,r,p,s}(h) = \widetilde{\chi}_{m,n,r,p}(h).$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.5.2. *Для произвольных* $m, n, r \in \mathbb{N},\ 2/r < p \le 2,\ r \ge 2;$ $s = 1, 2, ..., r-1;$ *и любой* $h \in (0, \pi]$ *справедливо равенство*

$$\widetilde{\chi}^{*}_{m,n,r,p,s}(h) := \left(\frac{2}{h^2} \cdot \int_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} dt\right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{1.5.9}$$

Доказательство. В самом деле, в правой части (1.5.8), введем обозначение $f^{(r-s)}(x) \equiv g(x)$, а потом $f^{(r)}(x) \equiv g^{(s)}(x)$, в силу равенства (1.5.2) запишем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h t\omega_m^p(f^{(r)}, t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \sup_{g\in L_2^{(s)}} \frac{2^{m/2} n^s E_{n-1}(g)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\omega_m^p(g^{(s)},t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.5.2.

§1.6. Верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов дифференцируемых функций в пространстве L_2

Содержание этого параграфа связано с решением некоторых экстремальных задач теории полиномиальных приближений в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. Решение указанных задач для различных конкретных ситуаций требует применения современных методов функционального анализа, основанных на получении некоторого точного неравенства для нормы или какой-либо другой характеристики, например такой, как верхняя грань наилучшего приближения заданного класса функций.

Всюду в этом параграфе X будет обозначать пространство непрерывных ($C := C[0, 2\pi]$), измеримых и существенно ограниченных ($L_\infty := L_\infty[0, 2\pi]$) или суммируемых на периоде в p-й степени ($L_p := L_p[0, 2\pi]$) 2π-периодических функций с конечной нормой

$$\|f\|_C := \max_t |f(t)|, \quad \|f\|_{L_\infty} := \sup_t vrai|f(t)|,$$

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad (1 \le p < \infty).$$

В экстремальных задачах теории аппроксимации с заданным классом $\mathfrak{M} \subset X$ часто связывают следующие его аппроксимационные характеристики:

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_X := \sup\left\{\inf\left\{\|f - T_{n-1}\|_X : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} \qquad (1.6.1)$$

—наилучшее приближение класса $\mathfrak{M}$ подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригономет–рических полиномов $T_{n-1}(x)$ порядка $n-1$ размерности $2n-1$:

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right).$$

$$\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_X := \sup\left\{\|f\|_X : \ f \in \mathfrak{M}^\perp\right\}, \qquad (1.6.2)$$

где $\mathfrak{M}_n^\perp$ – множество функций $f \in \mathfrak{M}$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)\begin{Bmatrix}\sin kx\\ \cos kx\end{Bmatrix} dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_X = \inf\{\sup\{\|f - Af\|_X : f \in \mathfrak{M}\} : A \in \mathscr{L}_n\}, \tag{1.6.3}$$

где $\mathscr{L}_n$ — совокупность всех линейных операторов, переводящих функции $f \in L$ в тригонометрические полиномы $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$. Отметим, что величина (1.6.3) наиболее детально исследована для оператора A_n^λ, задаваемого набором коэффициентов $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}\}$, и сопоставляющими функциями $f \in X$ полином

$$A_n^\lambda(f, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

где $a_k := a_k(f)$, $b_k := b_k(f)$ - косинус-и синус-коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе. Если полагать $\lambda := \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}\} \equiv \{1, 1, ..., 1\}$, то оператор $A_n^\lambda(f, t)$ обращается в частной суммы ряда Фурье

$$S_n(f, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right).$$

Поэтому, наряду с $\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_X$, введём ещё величины

$$\beta_{n-1}^\lambda(\mathfrak{M})_X = \inf\{\sup\{\|f - A_{n-1}^\lambda(f)\|_X : f \in \mathfrak{M}\} : A_{n-1}^\lambda \in \mathcal{T}_{2n-1}\}. \tag{1.6.4}$$

Из определения сразу следует, что

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_X \le \mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_X \le \beta_{n-1}^\lambda(\mathfrak{M})_X;$$

$$\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_X \le \beta_{n-1}^\lambda(\mathfrak{M})_X.$$

Последнее соотношение вытекает из того, что если $f \in \mathfrak{M}_{n-1}^\perp$, то $A_{n-1}^\lambda(f, t) \equiv 0$ и потому при любом наборе $\lambda := \{\lambda_k\}_{k=1}^{n-1}$ имеем:

$$\sup\{\|f\|_X : f \in \mathfrak{M}_n^\perp\} \le \sup\{\|f - A_{n-1}^\lambda(f)\|_X : f \in \mathfrak{M}\}.$$

В ряде важных случаев для конкретных классов функций все введённые выше характеристики (1.6.1) – (1.6.4) совпадают. Сначала приведём известные результаты, полученные в разных пространствах.

Пусть $W^{(r)}X$ – класс 2π-периодических функций f, у которых производная $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству X и удовлетворяют условию $\|f^{(r)}\|_X \leq 1$.

Отметим, что Ж.Фавар [58] доказал, что

$$E_{n-1}(W^{(r)}L_\infty)_C = \gamma_{n-1}(W^{(r)}L_\infty)_C = \beta_{n-1}^{\lambda}(W^{(r)}L_\infty)_C = \frac{K_r}{n^r} \quad (n, r = 1, 2, ...),$$

где

$$K_r = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}} \quad -$$

– константа Фавара.

Значения $E_{n-1}(W^{(r)}L_\infty)_C$ и $\beta_{n-1}^{\lambda}(W^{(r)}L_\infty)_C$ были вычислены также Н.И.Ахиезером и М.Г.Крейном [3].

В 1946 г. С.М.Никольский [39] вычислил величины (1.6.1) - (1.6.4) и доказал их совпадение в метриках C и $L := L_1[0, 2\pi]$ для некоторых классов функций, представимых в виде свёртки.

С.М.Никольским [39] было доказано, что

$$E_{n-1}(W^{(r)}L)_L = \gamma_{n-1}(W^{(r)}L)_L = \beta_{n-1}(W^{(r)}L)_L = \frac{K_r}{n^r} \quad (n, r = 1, 2, ...).$$

В работах В.К.Дзядыка [23] С.Б.Стечкина [51] и Сунь Юн-Шена [52] были получены аналогичные результаты в пространствах C и L для классов функций f, имеющих ограниченную дробную производную $f^{(r)}(t)$ $(r \in \mathbb{R}_+)$.

Следует отметить также результаты Л.В.Тайкова [56]:

$$\gamma_{n-1}(W^{(r)}L_\infty)_L = E_{n-1}(W^{(r)}L_\infty)_L = \frac{4K_{r+1}}{n^r} \quad (n, r = 1, 2, ...).$$

Здесь мы покажем совпадение всех вышеперечисленных аппроксимационных величин в пространстве L_2 для некоторых классов функций.

Сразу отметим, что в силу специфики гильбертова пространства L_2 (а именно свойства минимальности частичных сумм ряда Фурье функций $f \in L_2$) величины $\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$ и $\beta_{n-1}^{\lambda}(\mathfrak{M})_{L_2}$ совпадают, а потому из определения аппроксимационных характеристик (1.6.1) – (1.6.3) сразу вытекают соотношения

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$$

и возникает естественный вопрос, при выполнении каких условий относительно множества $\mathfrak{M}$ аппроксимационные величины (1.6.1) - (1.6.3) совпадают. Ниже мы покажем, что в ряде важных случаев, для конкретных классов периодических дифференцируемых функций все введённые выше величины (1.6.1) – (1.6.3) совпадают.

Наша цель состоит в отыскании точных значений величины (1.6.1) – (1.6.3) для некоторых классов функций, естественно возникающих из утверждений теоремы 1.2.3, 1.4.1 и 1.5.1.

Пусть $\Phi(t),\ t \ge 0$ – непрерывная неубывающая положительная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для $r \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N},\ 0 < p \le 2,\ 0 < h \le 2\pi$ введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_p^{(r)}(\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\int\limits_0^h \frac{1}{t} \left(\int\limits_0^t \omega^p(f^{(r)}, u)_{L_2} du \right) dt \right)^{1/p} \le \Phi(h) \right\},$$

$$W_{m,p}^{(r)}(\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (h-t)\omega_m^p(f^{(r)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \le \Phi(h) \right\},$$

$$\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h t\omega_m^p(f^{(r)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \le \Phi(h) \right\}.$$

Для этих классов функций справедливы следующие утверждения

Теорема 1.6.1. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < p \le 2$. *Тогда для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и*

$0 < nh \leq \pi$ *справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \delta_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2n^{-r}\cdot\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left(\sin\frac{nu}{2}\right)^p du\right)dt\right)^{-\frac{1}{p}}\cdot\Phi(h). \qquad (1.6.5)$$

В частности, при $h = \pi/n$ *из (1.6.5) следует, что*

$$E_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(1+\frac{1}{p})}\cdot n^{-r+\frac{1}{p}}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t(\sin u)^p du\right)dt\right)^{-\frac{1}{p}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теорема 1.6.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ \ 0 < p \leq 2$. *Тогда для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < nh \leq \pi/n$ *справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m}\cdot n^{-r}\cdot\left(\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h(h-t)\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-\frac{1}{p}}\cdot\Phi(h) =$$

$$= 2^{-m}\cdot n^{-r}\cdot\left(\frac{2}{(nh)^2}\cdot\int\limits_0^{nh}(nh-t)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-\frac{1}{p}}\cdot\Phi(h). \qquad (1.6.6)$$

В частности, при $h = \pi/n$ *из (1.6.6) следует, что*

$$E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})}\cdot\pi^{\frac{2}{p}}\cdot n^{-r}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi}t\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-\frac{1}{p}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (1.6.7)$$

Теорема 1.6.3. *Пусть* $m, r \in \mathbb{N},\ 2/r < p \leq 2,\ r \geq 2$. *Тогда для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < nh \leq \pi$ *справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m}\cdot n^{-r}\cdot\left(\frac{2}{(nh)^2}\cdot\int\limits_0^{nh} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-\frac{1}{p}}\cdot\Phi(h). \qquad (1.6.8)$$

В частности, при $h=\pi/n$ *из (1.6.8) следует, что*

$$E_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(r)}_{m,p}(\Phi)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(r)}_{m,p}(\Phi)\right)_{L_2}=\mathcal{E}_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(r)}_{m,p}(\Phi)\right)_{L_2}=$$

$$=2^{-(m+\frac{1}{p})}\cdot\pi^{\frac{2}{p}}\cdot n^{-r}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-\frac{1}{p}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Все теоремы 1.6.1, 1.6.2 и 1.6.3 доказывается по одной и той же схеме и только лишь небольшими вычислениями отличаются в идейном отношении, а потому мы приводим доказательство только теоремы 1.6.2.

Доказательство теоремы 1.6.2. Очевидно, что для справедливости цепочки равенство (1.6.6) достаточно доказать, что в неравенстве (1.6.4) оценка снизу $E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$ и оценка сверху $\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$ в случае $\mathfrak{M}=W^{(r)}_{m,p}(\Phi)$ в точности совпадают. Так как в гильбертовом пространстве L_2 совокупность всех линейных операторов, переводящих любую функцию $f\in L_2$ в тригоно–метрические полиномы порядка $n-1$, совпадает с частными суммами $S_{n-1}(f,x)$ порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f\in L_2$ (которая является также проектором в L_2), то имеет место равенство

$$E_{n-1}(f)_{L_2}=\mathcal{E}_{n-1}(f)_{L_2}=\|f-S_{n-1}(f)\|_{L_2}. \qquad (1.6.9)$$

Используя определение класса $W^{(r)}_{m,p}(\Phi)$, с учетом соотношения (1.6.9) запишем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{L_2}=\sup\left\{\|f-S_{n-1}(f)\|_{L_2}:\ f\in W^{(r)}_{m,p}(\Phi)\right\}\le$$

$$\le\sup_{f\in W^{(r)}_{m,p}(\Phi)}\left\{2^{-m}n^{-r}\left(\frac{2}{(nh)^2}\cdot\int\limits_0^{nh}(nh-t)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^{h} t\omega_m^p(f^{(r)},t)_{L_2}dt\right)^{1/p}\right\}\le$$

$$\leq 2^{-m}n^{-r}\left(\frac{2}{(nh)^2}\cdot\int\limits_0^{nh}(nh-t)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\cdot\Phi(h). \qquad (1.6.10)$$

Для получения оценки снизу величин $E_{n-1}(W^{(r)}_{m,p}(\Phi))_{L_2}$ введём в рассмотрение функцию

$$f_0(x)=2^{-m}n^{-r}\left(\frac{2}{(nh)^2}\cdot\int\limits_0^{nh}(nh-t)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\cdot\Phi(h)\cdot\cos nx.$$

Очевидно, что $f\in W^{(r)}_{m,p}(\Phi)$ и так как $S_{n-1}(f_0,x)\equiv 0$, то мы имеем:

$$\|f-S_{n-1}(f_0)\|_{L_2}\equiv\|f_0\|_{L_2}=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(\frac{2}{(nh)^2}\cdot\int\limits_0^{nh}(nh-t)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\cdot\Phi(h). \qquad (1.6.11)$$

Таким образом, с учётом равенства (1.6.11) получаем

$$E_{n-1}(W^{(r)}_{m,p}(\Phi))_{L_2}\geq\|f-S_{n-1}(f_0)\|_{L_2}=\|f_0\|_{L_2}=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(\frac{2}{(nh)^2}\cdot\int\limits_0^{nh}(nh-t)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\cdot\Phi(h). \qquad (1.6.12)$$

Требуемое равенство (1.6.6) получаем из сопоставления неравенств (1.6.10) и (1.6.12). Равенство (1.6.7) получаем непосредственным вычислением, чем и завершаем доказательство теоремы 1.6.2.

В 1910 году Лебегом [34] было впервые введено понятие модуля непрерывности и в терминах указанной характеристики были получены оценки сверху коэффициентов Фурье. В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах 2π-периодических функций в разное время рассматривались в работах А.В.Ефимова, А.Ф.Тимана, Н.П.Корнейчука, В.И.Бердышева, С.А.Теляковского, С.Милорадовича, А.И.Степанца и многих других (см., например, историю вопроса в монографии [48]).

Полученные в теоремах 1.6.1, 1.6.2 и 1.6.3 результаты можно применить к задаче вычислении верхних граней модулей коэффициентов Фурье на рассматриваемых классах функций.

Теорема 1.6.4. *При выполнении условий теоремы 1.6.1 имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Phi)\right\} =$$

$$= 2n^{-r} \cdot \left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left(\sin\frac{nu}{2}\right)^p du\right) dt\right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \Phi(h). \qquad (1.6.13)$$

В частности, при $h = \pi/n$ из (1.6.13) следует, что

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Phi)\right\} =$$

$$= 2^{-(1+\frac{1}{p})} \cdot n^{-r+\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t (\sin u)^p\, du\right) dt\right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теорема 1.6.5. *При выполнении условий теоремы 1.6.2 имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} =$$

$$= 2^{-m} \cdot n^{-r} \left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} (nh-t)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp} dt\right)^{-1/p} \cdot \Phi(h). \qquad (1.6.14)$$

В частности, при $h = \pi/n$ из (1.6.14) следует, что

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})} \cdot \pi^{\frac{2}{p}} \cdot n^{-r} \left(\int\limits_0^{\pi} t\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{mp} dt\right)^{-1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теорема 1.6.6. *В условиях теоремы 1.6.3 имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W^{(r)}_{m,p}(\Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W^{(r)}_{m,p}(\Phi)\right\} =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\cdot\Phi(h). \tag{1.6.15}$$

В частности, при $h = \pi/n$ из (1.6.15) вытекают равенства

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W^{(r)}_{m,p}(\Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W^{(r)}_{m,p}(\Phi)\right\} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})}\cdot\pi^{\frac{2}{p}}\cdot n^{-r}\left(\int\limits_0^{\pi} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Не умаляя общности, приводим доказательство теоремы 1.6.6, поскольку теоремы 1.6.4, и 1.6.5 доказываются аналогичным образом.

Доказательство теоремы 1.6.6. Не уменьшая общности, приведём рассуждения для косинус-коэффициентов $a_n(f)$. Учитывая, что

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(f(x) - S_{n-1}(f,x))\cos nx dx$$

и используя неравенство Коши-Буняковского и соотношение (1.6.8), получаем

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W^{(r)}_{m,p}\right\} \le$$

$$\sup\left\{\|f - S_{n-1}(f)\| :\ f \in W^{(r)}_{m,p}\right\} =$$

$$= E_{n-1}(W^{(r)}_{m,p}) = 2^{-m}n^{-r}\left\{\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}\cdot\Phi(h). \tag{1.6.16}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_1(x) := 2^{-m} n^{-r} \left\{ \frac{2}{(nh)^2} \int\limits_0^{nh} t \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right\}^{-1/p} \cdot \Phi(h) \cos nx.$$

Простые вычисления показывают, что $f_1 \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$, а потому

$$\sup \left\{ |a_n(f)| : \ f \in W_{m,p}^{(r)} \right\} \geq |a_n(f_1)| =$$

$$= 2^{-m} n^{-r} \left\{ \frac{2}{(nh)^2} \int\limits_0^{nh} t \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right\}^{-1/p} \cdot \Phi(h). \qquad (1.6.17)$$

Требуемое равенства (1.6.15) получаем после сопоставления неравенств (1.6.16) и (1.6.17), чем и завершаем доказательство теоремы 1.6.6.

Глава II

Точные значения n-поперечников некоторых классов функций, определяемых модулями непрерывности, в L_2

§2.1. Определения и обозначения n-поперечников

В этом параграфе излагаем необходимые определения и обозначения, которыми будем пользоваться при изложении результатов этой главы.

Пусть X – произвольное банахово пространство, $\mathfrak{M} \subset X$ – некоторый класс функций и пусть $L_n \subset X$ – некоторое подпространство заданной размерности n. Величину

$$E_n(\mathfrak{M})_X := E(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup\left\{E(f, L_n)_X : \ f \in \mathfrak{M}\right\} =$$

$$= \sup\left\{ \inf\left\{\Big\|f - g\Big\|_X : \ g \in L_n\right\} : \ f \in \mathfrak{M}\right\} \tag{2.1.1}$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{M}$ подпространством L_n заданной размерности n. Величина (2.1.1) характеризует отклонение класса $\mathfrak{M}$ от подпространства L_n в метрике пространства X.

Если обозначить через $\mathcal{L}(X, L_n)$ – множество всех непрерывных операторов $A : \ X \to L_n$, действующих из X в произвольно заданное подпространство $L_n \subset X$ размерности n, то возникает следующая задача: найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\left\{ \sup\left\{\Big\|f - Af\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\right\} : \ A \in \mathcal{L}(X, L_n)\right\} \tag{2.1.2}$$

и указать оператор $A_* \subset \mathcal{L}(X, L_n)$, реализующий точную нижнюю грань в равенстве (2.1.2):

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\left\{\Big\|f - A_* f\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Задачу (2.1.2) можно рассматривать в более узком смысле: нижнюю грань искать не по всему множеству $\mathcal{L}(X, L_n)$ непрерывных операторов $A : \ X \to L_n$, а только по некоторому классу таких операторов, которые определяются тем или иным способом задания. В частности, можно выделить в $\mathcal{L}(X, L_n)$ класс линейных непрерывных операторов $A: X \to L_n$ и рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$
$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_X : f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \subset \mathcal{L}(X, L_n)\Big\}. \quad (2.1.3)$$

Если существует оператор $A^* : X \to L_n$, для которого достигается внешняя нижняя грань в (2.1.3), то такой оператор определяет наилучший линейный метод приближения в задаче (2.1.3), то есть

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{\Big\|f - A^*f\Big\|_X : f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Если же в $\mathcal{L}(X, L_n)$ выделить класс $\mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство L_n, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in L_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$
$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_X : f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \subset \mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)\Big\}. \quad (2.1.4)$$

С величинами (2.1.1) – (2.1.4) связана задача отыскания значения n-поперечников для различных классов функций $\mathfrak{M}$.

Напомним определения n-поперечников, значения которых для конкретных классов $\mathfrak{M}$ вычислим в этой главе.

n-поперечником в смысле А.Н.Колмогорова [29] класса функций $\mathfrak{M}$ в пространстве X называют величину

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{E(\mathfrak{M}, L_n) : L_n \subset X\right\}, \quad (2.1.5)$$

где нижняя грань берётся по всем подпространствам заданной размерности n из пространства X.

Если исходить из наилучшего линейного приближения $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X$, то величину

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X\right\} \quad (2.1.6)$$

называют *линейным n-поперечником* класса $\mathfrak{M}$ в пространстве X.

Аналогичным образом, взяв за основу величину (2.1.4), вводят рассмотрение *проекционный n-поперечник*

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X :\ L_n \subset X\right\}. \tag{2.1.7}$$

Существует ещё две величины, известные в теории приближений под названиями *„n - поперечник по Гельфанду" и „n - поперечник по Бернштейну".*

Пусть S – единичный шар в пространстве X, то есть

$$S = \{x \in X, \|x\|_X \leq 1\}.$$

Величину

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\inf\left\{\mathfrak{M} \cap L^n \subset \varepsilon S : \varepsilon > 0\right\} :\ L^n \subset X\right\}, \tag{2.1.8}$$

где внешний инфимум берётся по всем подпространствам L^n коразмерности n, называют *n-поперечником по Гельфанду,* а величину

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} :\ \varepsilon > 0\right\} :\ L_{n+1} \subset X\right\} \tag{2.1.9}$$

называют *n-поперечником по Бернштейну.*

Очевидно, что между величинами (2.1.5) – (2.1.9) выполняются соотношения

$$b_n(\mathfrak{M}; X) \leq \begin{array}{c} d_n(\mathfrak{M}; X) \\ d^n(\mathfrak{M}; X) \end{array} \leq \lambda_n(\mathfrak{M}; X) \leq \Pi_n(\mathfrak{M}; X).$$

Если X – гильбертово пространство, то между вышеперечисленными n-поперечниками выполняются неравенства [47, 57]:

$$b_n(\mathfrak{M}; X) \leq d^n(\mathfrak{M}; X) \leq d_n(\mathfrak{M}; X) = \lambda_n(\mathfrak{M}; X) = \Pi_n(\mathfrak{M}; X). \tag{2.1.10}$$

Первое неравенство $b_n(\mathfrak{M}; X) \leq d^n(\mathfrak{M}; X)$ в (2.1.10) можно найти в монографии A.Pinkus [47], а все остальные в монографии В.М.Тихимирова [57].

§2.2. Точные значения n-поперечников классов $W_2^{(r)}(\Phi)$, $W_p^{(r)}$ $(0 < p \leq 2, \quad h > 0)$.

Пусть $\Phi(h), h \geq 0$-произвольная возрастающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Определим класс функций

$$W_2^{(r)}(\Phi) = \left\{ f \in L_2 : \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u)_2 du \right) dt \leq \Phi^2(h) \right\},$$

где $h > 0$ и $r \in \mathbb{Z}_+$.

Аналогичным образом, для $h > 0$, $0 < p \leq 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$ определим следующий класс функций:

$$W_p^{(r)} = \left\{ f \in L_2 : \left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^p(f^{(r)}, u)_2 du \right) dt \right)^{1/p} \leq 1 \right\}.$$

Теорема 2.2.1. *Пусть функция $\Phi(h)$ удовлетворяет условиям:*

$$2(nh - Si(nh))\Phi^2(\pi/(2n)) \leq (\pi - 2Si(\pi/2))\Phi^2(h), 0 < h \leq \pi/(2n); \quad (2.2.1)$$

$$(4nh - \pi - 2Si(\pi/2))\Phi^2(\pi/(2n)) \leq (\pi - 2Si(\pi/2)) \cdot \Phi^2(h), h > \pi/(2n). \quad (2.2.2)$$

Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\delta_{2n-1}\left(W_2^{(r)}(\Phi), L_2\right) = \delta_{2n}\left(W_2^{(r)}(\Phi), L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \frac{1}{n^{r-\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ \frac{1}{\pi - 2Si(\pi/2)} \right\}^{1/2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right), \qquad (2.2.3)$$

где $\delta_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ или $\Pi_n(\cdot)$, а величина

$$E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} := \sup\{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_2^{(r)}(\Phi)\}.$$

Множество мажорантных функций $\Phi(h)$, удовлетворяющих условиям (2.2.1) и (2.2.2), не пусто.

Доказательство. Полагая в неравенстве $(1.2.4)'$ $h = \pi/(2n)$ для произвольной функции $f \in W_2^{(r)}(\Phi)\}$ получим

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{n^r} \cdot \left\{ \frac{n}{2\left[\frac{\pi}{2} - Si\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^{\pi/(2n)} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega^2(f^{(r)}, u) du \right) dt \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{n^{r-\frac{1}{2}}} \cdot \{\pi - 2Si(\pi/2)\}^{-1/2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

откуда, учитывая соотношения (2.1.10), между n-поперечниками запишем оценку сверху

$$\delta_{2n}\left(W_2^{(r)}(\Phi), L_2\right) \le \delta_{2n-1}\left(W_2^{(r)}(\Phi), L_2\right) \le$$

$$\le d_{2n-1}\left(W_2^{(r)}(\Phi), L_2\right) \le E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} \le$$

$$\le \frac{1}{n^{r-\frac{1}{2}}} \cdot \{\pi - 2Si(\pi/2)\}^{-1/2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right), \qquad (2.2.4)$$

Для получения оценки снизу вышеперечисленных n-поперечников рассмотрим в $\mathcal{T}_{2n+1} \cap L_2$ шар полиномов

$$S_{2n+1} \overset{def}{=} \left\{ T_n(x) \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \le n^{-r+\frac{1}{2}} \cdot \{\pi - 2Si(\pi/2)\}^{-1/2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}$$

и покажем принадлежность S_{2n+1} классу $W_2^{(r)}(\Phi)$.

Пусть сначала $0 < h \le \pi/(2n)$. Используя определение класса $W_2^{(r)}(\Phi)$, доказанного Л.В.Тайковым [53], неравенство

$$\omega^2(T_n^{(r)}, x) \le 2(1 - \cos nx)_* \cdot n^{2r} \cdot \|T_n\|^2, \qquad (2.2.5)$$

где $T_n(x)$ – произвольный тригонометрический полином из S_{2n+1}, а

$$(1 - \cos nx)_* := \{1 - \cos nx, \ \text{ если } \ 0 \le nx \le \pi; \ \ 2, \ \text{ если } \ nx > \pi\},$$

неравенство (2.2.1) при любом h, удовлетворяющем условию $h \in (0, \pi/(2n)]$, для произвольного полинома $T_n \in S_{2n+1}$, имеем:

$$\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega^2(T_n^{(r)}, u) du \right) dt \le \int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t [2(1 - \cos nu) \cdot n^{2r} \cdot \|T_n\|^2] du \right) dt =$$

$$= 2n^{2r}\cdot\|T_n\|^2\cdot\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)dt = 2n^{2r}h\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)\cdot\|T_n\|^2\leq$$

$$\leq 2n^{2r}\cdot\frac{nh-Si(nh)}{n}\cdot\frac{n}{2\left(\frac{\pi}{2}-Si\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}\cdot n^{-2r}\cdot\Phi^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)=$$

$$=\frac{2(nh-Si(nh))}{\pi-2Si(\pi/2)}\cdot\Phi^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\leq\Phi^2(h). \qquad (2.2.6)$$

Пусть теперь $h > \pi/n$. Применяя аналогичные соображения и неравенство (2.2.2), для произвольного полинома $T_n \in S_{2n+1}$ с учётом неравенства (2.2.5) запишем

$$\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega^2(f^{(r)},u)du\right)dt\leq\int\limits_0^{\pi/(2n)}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega^2(T_n^{(r)},u)du\right)dt+$$

$$+\int\limits_{\pi/(2n)}^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega^2(T_n^{(r)},u)du\right)dt\leq\Phi^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)+4n^{2r}\cdot\|T_n\|^2\cdot\left(h-\frac{\pi}{2n}\right)\leq$$

$$\leq\Phi^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)+2n^{2r-1}\cdot(2nh-\pi)n^{-2r+1}\cdot(\pi-2Si(\pi/2))^{-1}\cdot\Phi^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)=$$

$$=\left\{1+\frac{2(2nh-\pi)}{\pi-2Si(\pi/2)}\right\}\cdot\Phi^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)=$$

$$=\frac{4nh-\pi-2Si(\pi/2))}{\pi-2Si(\pi/2)}\cdot\Phi^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\leq\Phi^2(h). \qquad (2.2.7)$$

Из неравенств (2.2.6) и (2.2.7) сразу следует включение $S_{2n+1}\subset W_2^{(r)}(\Phi)$. Учитывая соотношения (2.1.10) между n-поперечниками и определение бернштейновского n-поперечника, запишем оценки снизу для рассматриваемых аппроксимационных характеристик:

$$\delta_{2n-1}\left(W_2^{(r)}(\Phi),L_2\right)\geq\delta_{2n}\left(W_2^{(r)}(\Phi),L_2\right)\geq$$

$$\geq b_{2n}\left(W_2^{(r)}(\Phi),L_2\right)\geq b_{2n}\left(S_{2n+1},L_2\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{n^{r-\frac{1}{2}}}\cdot\left\{\frac{1}{\pi-2Si(\pi/2)}\right\}^{1/2}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (2.2.8)$$

Требуемые равенства (2.2.3) получаем из оценки сверху (2.2.4) и оценки снизу (2.2.8). Во второй части теоремы мы докажем, что множество мажорантных функций Φ, удовлетворяющих условиям (2.2.1) и (2.2.2), не пусто. С этой целью введём в рассмотрение функцию $\Phi_*(h) = h^{\alpha/2}$, где

$$\alpha = \pi \cdot (\pi - 2Si(\pi/2))^{-1}, \quad (2,95 < \alpha < 2,97) \tag{2.2.9}$$

удовлетворяет условиям (2.2.1) и (2.2.2). Конкретизируя в (2.2.1) функцию Φ, получаем неравенство

$$\left(\frac{2nh}{\pi}\right)^{\alpha} \geq \frac{2nh - 2Si(nh)}{\pi - 2Si(\pi/2)}, \qquad 0 \leq h \leq \pi/(2n), \tag{2.2.10}$$

которое предстоит ещё доказать. Полагая $\mu := (2nh)/\pi$, перепишем нера–венство (2.2.10) в эквивалентном виде

$$\mu^{\alpha} \geq \frac{\mu\pi - 2Si(\mu\pi/2)}{\pi - 2Si(\pi/2)}, \qquad 0 \leq \mu \leq 1. \tag{2.2.11}$$

Исходя из неравенства (2.2.11), на отрезке [0,1] введём в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha} - \frac{\mu\pi - 2Si(\mu\pi/2)}{\pi - 2Si(\pi/2)} \tag{2.2.12}$$

и докажем, что при всех $\mu \in [0,1]$ функция $\varphi(\mu) \geq 0$. В самом деле, учитывая в силу (2.2.9), что $2,95 < \alpha < 9,97$, при $\mu \to +0$ имеем

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha} - \frac{\mu\pi - 2Si(\mu\pi/2)}{\pi - 2Si(\pi/2)} = \mu^{\alpha} - \frac{1}{\pi - 2Si(\pi/2)}\left(\mu\pi - 2\int\limits_0^{\mu\pi/2} \frac{\sin t}{t}dt\right) =$$

$$= \mu^{\alpha} - \frac{1}{\pi - 2Si(\pi/2)}\left(\mu\pi - \mu\pi + \frac{2}{3!3}\cdot\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^3 + O(\mu^5)\right) =$$

$$= \mu^{\alpha}\left(1 - \frac{\mu^{3-\alpha}\cdot 2\pi^3}{18(\pi - 2Si(\pi/2))} + O(\mu^{5-\alpha})\right). \tag{2.2.13}$$

Из (2.2.13) следует, что существует отрезок $[0,\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < 1$, на котором функция $\varphi(\mu) \geq 0$. Покажем, что и на всём отрезке [0,1] функция $\varphi(\mu) \geq 0$. Для этого применим метод от противного, полагая, что на интервале (0,1) существует некоторая точка η $(0 < \eta < 1)$, в котором функция φ имеет знак.

Поскольку, как следует из (2.2.12), $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, то на основании теоремы Ролля производная первого порядка

$$\varphi'(\mu) = \alpha\mu^{\alpha-1} - \frac{\pi}{\pi - 2Si(\pi/2)}\left(1 - \frac{\sin(\mu\pi/2)}{\mu\pi/2}\right) =$$

$$= \alpha\mu^{\alpha-1} - \alpha\left(1 - \frac{\sin(\mu\pi/2)}{\mu\pi/2}\right) = \alpha\left(\mu^{\alpha-1} - 1 + \frac{2}{\mu\pi}\sin\frac{\mu\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\mu\pi}\left[\pi\mu^{\alpha} - \mu\pi + 2\sin\frac{\mu\pi}{2}\right] := \frac{\alpha}{\mu\pi}\cdot\varphi_1(\mu) \qquad (2.2.14)$$

имеет на интервале (0,1) не менее двух нулей. Из формулы (2.2.14) вытекает, вопрос сколько же нулей на интервале (0,1) имеет функция $\varphi_1(\mu)$ и, кроме того, ещё $\varphi_1(0) = 0$. Но тогда производная

$$\varphi_1'(\mu) = \alpha\pi\mu^{\alpha-1} - \pi + \pi\cos\frac{\mu\pi}{2} \qquad (2.2.15)$$

на этом же интервале имеет не менее двух нулей и, кроме того, в силу (2.2.15) $\varphi_1'(0) = 0$. Следовательно, производная второго порядка

$$\varphi_1''(\mu) = \pi\alpha(\alpha-1)\mu^{\alpha-2} - \frac{1}{2}\pi^2\sin\frac{\mu\pi}{2}$$

на интервале (0,1) должна иметь не менее двух нулей и ещё $\varphi_1''(0) = 0$, а потому производная третьего порядка

$$\varphi_1'''(\mu) = \pi\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\mu^{\alpha-3} - \frac{1}{4}\pi^3\cos\frac{\mu\pi}{2} \qquad (2.2.16)$$

также обязана иметь на (0,1) не менее двух различных нулей.

Из формулы (2.2.16) получаем, что производная $\varphi_1'''(\mu)$ на интервале (0,1) является разностью двух функций, из которых первая принимает лишь положительные значения и является выпуклой вниз, а вторая является выпуклой вверх и положительной на (0,1) и, исходя из геометрических соображений, в силу строгой монотонности не могут пересекаться более одного раза. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (2.2.11).

Докажем второе неравенство (2.2.2). Указанное неравенство перепишем в более удобном для исследования виде

$$\mu^{\alpha} \geq \frac{4nh - \pi - 2Si(\pi/2)}{\pi - 2Si(\pi/2)} = \frac{(4nh - 2\pi) + \pi - 2Si(\pi/2)}{\pi - 2Si(\pi/2)} =$$

$$= \frac{(2\mu\pi - 2\pi)}{\pi - 2Si(\pi/2)} + 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{\pi - 2Si(\pi/2)}(\mu - 1) + 1 = 2\alpha(\mu - 1) + 1$$

и введём в рассмотрение следующую вспомогательную функцию

$$\varphi_2(\mu) = \mu^\alpha - 2\alpha(\mu - 1) - 1.$$

Так как

$$\varphi_2(\mu) = \mu^\alpha - 2\mu^{\alpha/2} \cdot \alpha + \alpha^2 + (2\mu^{\alpha/2}\alpha - 2\mu\alpha) + (2\alpha - 1 - \alpha^2) =$$

$$= (\mu^{\alpha/2} - \alpha)^2 + 2\alpha\mu(\mu^{(\alpha/2)-1} - 1) - (1 - \alpha)^2 =$$

$$= \{(\mu^{\alpha/2} - \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2\} + 2\alpha\mu(\mu^{(\alpha/2)} - 1) >$$

$$> 2\alpha\mu(\mu^{(\alpha/2)} - 1) > 0,$$

при всех $\mu > 1$, поскольку $\alpha > 2$ и, кроме того, $\varphi_2(1) = 0$, то функция $\varphi_2(\mu)$ на всём множестве $1 \leq \mu < \infty$ положительна.

Терема 2.2.1 полностью доказана.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $1/r < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$, $h \in [0, \pi/n]$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда при любом* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\delta_{2n-1}\left(W_p^{(r)}, L_2\right) = \delta_{2n}\left(W_p^{(r)}, L_2\right) = E_{n-1}\left(W_p^{(r)}, L_2\right) =$$

$$= 2^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)} n^{-r+\frac{1}{p}} \left(\int_0^{nh} \left(\frac{1}{t}\int_0^t (\sin u)^p\, du\right) dt\right)^{-1/p}.$$

Доказательство. Используя определение класса $W_p^{(r)}$ из неравенства (1.2.14), запишем оценку с верху всех рассматриваемых n-поперечников

$$\delta_{2n}\left(W_p^{(r)}, L_2\right) \leq \delta_{2n-1}\left(W_p^{(r)}, L_2\right) \leq E_{n-1}\left(W_p^{(r)}\right)_{L_2} \leq$$

$$\leq 2^{-1} n^{-r} \left(\int_0^h \frac{1}{t}\left(\int_0^t \left(\sin\frac{nu}{2}\right)^p du\right) dt\right)^{-1/p} =$$

$$= 2^{-1} n^{-r} \left(\int_0^h \frac{2}{nt}\left(\int_0^t \left(\sin\frac{nu}{2}\right)^p d\left(\frac{nu}{2}\right)\right) dt\right)^{-1/p} =$$

$$= 2^{-1}n^{-r}\left(\frac{2}{n}\cdot\int\limits_0^h \frac{2}{nt}\left(\int\limits_0^{nt/2}(\sin u)^p\,du\right)d\left(\frac{nt}{2}\right)\right)^{-1/p} =$$

$$= 2^{-1}n^{-r}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^{1/p}\cdot\left(\int\limits_0^{nh/2}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t(\sin u)^p\,du\right)dt\right)^{-1/p} =$$

$$= 2^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)}\cdot n^{-r+\frac{1}{p}}\cdot\left(\int\limits_0^{nh/2}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t(\sin u)^p\,du\right)dt\right)^{-1/p} \tag{2.2.17}$$

С целью получения оценки снизу рассматриваемых n-поперечников, равную правой части неравенств (2.2.17) во множестве $\mathcal{T}_{2n+1}\cap L_2$, введём в рассмотрение $(2n+1)$ – мерный шар полиномов:

$$\sigma_{2n+1} := \left\{T_n\in\mathcal{T}_n : \|T_n\| \le 2^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)}n^{-r+\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^{nh/2}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t(\sin u)^p\,du\right)dt\right)^{-1/p}\right\}$$

и докажем его принадлежность классу $W_p^{(r)}$. Воспользуясь неравенством (2.2.5), запишем

$$\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega^p(T_n^{(r)},u)du\right)dt \le 2^{p/2}n^{rp}\|T_n\|^p\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t(1-\cos nu)^{p/2}\,du\right)dt =$$

$$= 2^p n^{rp}\|T_n\|^p\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left(\sin\frac{nu}{2}\right)^p du\right)dt =$$

$$= 2^{p+1}n^{rp-1}\cdot\left(\int\limits_0^{nh/2}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t(\sin u)^p\,du\right)dt\right)\cdot\|T_n\|^p \le 1, \tag{2.2.18}$$

Из (2.2.18) сразу вытекает выключение $\mathcal{T}_{2n+1}\subset W_p^{(r)}$. Но тогда, как и в предыдущей теореме 2.2.1, запишем

$$\delta_{2n-1}\left(W_p^{(r)},L_2\right) \ge \delta_{2n}\left(W_p^{(r)},L_2\right) \ge b_{2n}\left(W_p^{(r)},L_2\right) \ge$$

$$\geq b_{2n}\left(\mathcal{T}_{2n+1}, L_2\right) \geq 2^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)} \cdot n^{-r+\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_0^{nh} \frac{1}{t}\left(\int\limits_0^{t} (\sin u)^p\, du\right) dt\right)^{-1/p}. \quad (2.2.19)$$

Утверждение теоремы 2.2.2 следует из сопоставления оценки сверху (2.2.17) и оценки снизу (2.2.19), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.2.

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.2 при* $p = 2$ *и* $h = \pi/2$ *справедливы равенства*

$$\delta_{2n-1}\left(W_2^{(r)}, L_2\right) = \delta_{2n}\left(W_2^{(r)}, L_2\right) = E_{n-1}\left(W_2^{(r)}, L_2\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}n^{r-\frac{1}{2}}} \cdot (\pi - Si(2\pi))^{-1/2}.$$

§2.3. Точные значения n-поперечников класса $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$

В этом параграфе вычислим точные значения всех перечисленных в предыдущем параграфе n-поперечников для введённого нами в параграфе 1.6 класса функций

$$W_{m,p}^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\omega_m^p(f^{(r)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \le \Phi(h) \right\},$$

где $r \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N},\ 0 < p \le 2,\ 0 < h \le 2\pi$, при выполнении некоторых естественных ограничений на мажоранту Φ.

Имеет место следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$. Если мажоранта Φ при любом $h \in (0, 2\pi]$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge \left(\frac{\pi}{nh}\right)^2 \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} t\,(\cos t)^{mp}\,dt \right)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^{nh/2} \left(\frac{nh}{2} - t\right) (\sin t)^{mp}\,dt, & \textit{если}\ \ 0 \le h \le \pi/n \\ \displaystyle\frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi/2} t\,(\cos t)^{mp}\,dt + \frac{1}{8}\left(\frac{nh}{\pi} - 1\right)^2, & \textit{если}\ \ h \ge \pi/n, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

тогда для любых натуральных n справедливы равенства

$$\delta_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) = \delta_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) = E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right) =$$

$$= 2^{-(m+3/p)} \cdot \pi^{\frac{2}{p}} \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} t(\cos t)^{mp} dt \right)^{-1/p} \cdot n^{-r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{2.3.2}$$

где $\delta_n(\cdot)$ - любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.

Множество мажорант, удовлетворяющих условию (2.3.1), не пусто.

Доказательство. В самом деле, оценку сверху рассматриваемых аппроксимационных величин получаем из соотношения (2.1.10) и равенство

(1.6.5), полагая в нём $h = \pi/n$:

$$\delta_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) \le \delta_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) \le$$

$$\le d_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right)) \le E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} \le$$

$$\le 2^{-m} n^{-r} \cdot \left(\frac{2}{\pi^2} \cdot \int\limits_0^\pi (\pi - t)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp} dt\right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{-m} \cdot n^{-r} \cdot \left(\frac{2}{\pi^2} \cdot \int\limits_0^\pi t\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{mp} dt\right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{-m} \cdot n^{-r} \cdot \left(\frac{8}{\pi^2} \cdot \int\limits_0^\pi t(\cos t)^{mp} dt\right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{-(m+3/p)} \cdot \pi^{2/p} \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} t(\cos t)^{mp} dt\right)^{-1/p} \cdot n^{-r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.3.3}$$

Для получения оценки снизу вышеперечисленных n-поперечников класса $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$ в $\mathcal{T}_{2n+1} \cap L_2$ вводим в рассмотрение $(2n+1)$-мерный шар тригонометрических полиномов

$$\sigma_{2n+1} = \left\{T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} \cap L_2 : \|T_n\| \le\right.$$

$$\left.\le 2^{-\left(m+\frac{3}{p}\right)} n^{-r} \left(\frac{1}{\pi^2} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} t\,(\cos t)^{mp}\, dt\right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

и докажем его принадлежность классу $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$.

Пусть сначала $0 < h \le \pi/n$. Воспользуемся следующим неравенством, доказанным Л.В.Тайковым [55]:

$$\omega_m(T_n^{(r)}, t) \le 2^m n^r \left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*^m \|T_n\|, \tag{2.3.4}$$

где $T_n(x)$ – произвольный тригонометрический полином из множества $\mathcal{T}_{2n+1}$ – – тригонометрических полиномов порядка n, а функция

$$(\sin t)_* = \{\sin t, \text{ если } 0 \le t \le \pi/2;\ 1, \text{ если } t > \pi/2\}. \qquad (2.3.5)$$

Используя определение класса $W^{(r)}_{m,p}(\Phi)$ и первое из ограничений в неравен– стве (2.3.1), из неравенства (2.3.4) для произвольного полинома $T_n \in \sigma_{2n+1}$ при любом $0 < p \le 2$ получаем:

$$\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h (h-t)\omega_m^p(T_n^{(r)},t)dt \le$$

$$\le 2^{mp}\cdot n^{rp}\cdot\|T_n\|^p\cdot\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h (h-t)\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt =$$

$$= 2^{mp+3}\cdot n^{rp}\cdot\|T_n\|^p\cdot\frac{1}{(nh)^2}\cdot\int\limits_0^{nh/2}\left(\frac{nh}{2}-t\right)(\sin t)^{mp}dt \le$$

$$\le 2^{mp+3}\cdot n^{rp}\cdot\left\{2^{-(mp+3)}\cdot n^{-rp}\cdot\pi^2\cdot\left(\int\limits_0^{\pi/2} t(\cos t)^{mp}dt\right)^{-1}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{(nh)^2}\cdot\int\limits_0^{nh/2}\left(\frac{nh}{2}-t\right)(\sin t)^{mp}dt =$$

$$= \left(\frac{\pi}{nh}\right)^2\cdot\frac{\int\limits_0^{nh/2}\left(\frac{nh}{2}-t\right)(\sin t)^{mp}dt}{\int\limits_0^{\pi/2} t\,(\cos t)^{mp}\,dt}\cdot\Phi^p\left(\frac{\pi}{n}\right) \le \Phi^p(h). \qquad (2.3.6)$$

Пусть теперь $h \ge \pi/n$. Используя неравенство (2.3.4) и второе из ограничений в неравенстве (2.3.1), с учетом определения функции $(\sin t)_*$ в равенстве (2.3.5) будем иметь

$$\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h (h-t)\omega_m^p(T_n^{(r)},t)dt \le$$

$$\le \frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h (h-t)\cdot\left\{2^{mp}\cdot n^{rp}\cdot\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*^{mp}\cdot\|T_n\|^p\right\}dt =$$

$$\le 2^{mp}\cdot n^{rp}\cdot\|T_n\|^p\cdot\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h (h-t)\cdot\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*^{mp}dt =$$

$$= 2^{mp}\cdot n^{rp}\cdot\|T_n\|^p\cdot\frac{2}{h^2}\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi/n}\left(\frac{\pi}{n}-t\right)\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt+\int\limits_{\pi/n}^h (h-t)dt\right\} =$$

$$= 2^{mp}\cdot n^{rp}\cdot\|T_n\|^p\cdot\frac{2}{h^2}\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi/n} t\left[\sin\frac{n}{2}\left(\frac{\pi}{n}-t\right)\right]^{mp}dt+\int\limits_{\pi/n}^h (h-t)dt\right\} =$$

$$= 2^{mp}\cdot n^{rp}\cdot\|T_n\|^p\cdot\frac{2}{h^2}\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi/n} t\left(\cos\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt+\frac{1}{2}\left(h-\frac{\pi}{n}\right)^2\right\} =$$

$$= 2^{mp}\cdot n^{rp}\cdot\|T_n\|^p\cdot\frac{2}{h^2}\cdot\left\{\frac{4}{n^2}\cdot\int\limits_0^{\pi/2} t(\cos t)^{mp}dt+\frac{1}{2n^2}(nh-\pi)^2\right\} =$$

$$= 2^{mp}\cdot n^{rp}\cdot\|T_n\|^p\cdot\frac{8}{(nh)^2}\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi/2} t(\cos t)^{mp}dt+\frac{1}{8}(nh-\pi)^2\right\} =$$

$$= 2^{mp+3}\cdot n^{rp}\cdot\|T_n\|^p\cdot\left(\frac{\pi}{nh}\right)^2\cdot\left\{\frac{1}{\pi^2}\cdot\int\limits_0^{\pi/2} t(\cos t)^{mp}dt+\frac{1}{8}\left(\frac{nh}{\pi}-1\right)^2\right\} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\pi^2}\cdot\int\limits_0^{\pi/2} t(\cos t)^{mp}dt\right)^{-1}\cdot\Phi^p\left(\frac{\pi}{n}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\pi}{nh}\right)^2\cdot\left\{\frac{1}{\pi^2}\cdot\int\limits_0^{\pi/2}t(\cos t)^{mp}dt+\frac{1}{8}\left(\frac{nh}{\pi}-1\right)^2\right\}=$$

$$=\left(\frac{\pi}{nh}\right)^2\cdot\Phi^p\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\left\{\frac{1}{\pi^2}\cdot\int\limits_0^{\pi/2}t(\cos t)^{mp}dt+\frac{1}{8}\left(\frac{nh}{\pi}-1\right)^2\right\}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^{\pi/2}t(\cos t)^{mp}dt\right)^{-1}\leq\Phi^p(h). \qquad (2.3.7)$$

Из неравенств (2.3.6) и (2.3.7) сразу следует включение $\sigma_{2n+1}\subset W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$. Учитывая соотношение (2.1.10) между n-поперечниками и определение бернштейновского n-поперечника, запишем оценки снизу для рассматри– ваемых аппроксимационных величин:

$$\delta_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\right)\geq\delta_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\right)\geq$$

$$\geq b_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\right)\geq b_{2n}(\sigma_{2n+1},L_2)\geq$$

$$\geq 2^{-\left(m+\frac{3}{p}\right)}\cdot\pi^{\frac{2}{p}}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi/2}t(\cos t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\cdot n^{-r}\Phi(\pi/n). \qquad (2.3.8)$$

Требуемое равенство (2.3.2) получаем из сопоставления оценки сверху (2.3.3) и оценки снизу (2.3.8).

Во второй части доказательства теоремы докажем, что множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (2.3.1), не пусто. С этой целью рассмотрим функцию $\Phi_*(h)=h^\alpha$, где

$$\alpha:=\alpha(m,p)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{mp}\,dt}{\int\limits_0^{\pi/2}t\,(\cos t)^{mp}\,dt}-2 \qquad (2.3.9)$$

$$(0<p\leq 2;\ r\in\mathbb{Z}_+,\ m\in\mathbb{N})$$

и убедимся в том, что для Φ_* имеет место соотношение (2.3.1). Прежде всего находим границы изменения числа α. В частности, имеют место равенства

$$\min\{\alpha(m,p):\ 0<p\le 2\} = \lim_{p\to 0}\alpha(m,p) = 0,$$

$$\max\{\alpha(m,p):\ 0<p\le 2\} = \alpha(m,2/m) = \frac{2\pi}{\pi-2} \approx 2,5\ .$$

Таким образом, для числа $\alpha := \alpha(m,p)$ имеем следующие границы значений:

$$0<\alpha<2,5\ . \tag{2.3.10}$$

Убедимся в том, что для числа α, определённого формулой (2.3.9), оба неравенства в соотношении (2.3.1) выполняются. Конкретизируя с этой целью в условии (2.3.1) функцию Φ, то есть полагая $\Phi_*(h) = h^\alpha$, получаем неравенства

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^{\alpha+2} \ge \left(\int\limits_0^{\pi/2} t\,(\cos t)^{mp}\,dt\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\begin{cases} \int\limits_0^{nh/2}\left(\dfrac{nh}{2}-t\right)(\sin t)^{mp}\,dt, & \text{если}\ \ 0\le nh\le\pi, \\ \dfrac{1}{\pi^2}\cdot\int\limits_0^{\pi/2} t\,(\cos t)^{mp}\,dt + \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{nh}{\pi}-1\right)^2, & \text{если}\ \ nh\ge\pi, \end{cases} \tag{2.3.11}$$

которые необходимо доказать. Полагая $\mu = nh/\pi$, перепишем неравенство (2.3.11) в эквивалентном виде

$$\mu^{\alpha+2} \ge \left(\int\limits_0^{\pi/2} t\,(\cos t)^{mp}\,dt\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\begin{cases} \int\limits_0^{\mu\pi/2}\left(\dfrac{\mu\pi}{2}-t\right)(\sin t)^{mp}\,dt, & \text{если}\ \ 0\le\mu\le 1, \\ \dfrac{1}{\pi^2}\cdot\int\limits_0^{\pi/2} t\,(\cos t)^{mp}\,dt + \dfrac{1}{8}(\mu-1)^2, & \text{если}\ \ \mu\ge 1. \end{cases} \tag{2.3.12}$$

Исходя из неравенство (2.3.12), рассмотрим на отрезке $[0,1]$ вспомогательную функцию

$$R(\mu) := \mu^{\alpha+2} - \frac{\int\limits_0^{\mu\pi/2} \left(\frac{\mu\pi}{2} - t\right)(\sin t)^{mp} dt}{\int\limits_0^{\pi/2} t(\cos t)^{mp} dt}. \tag{2.3.13}$$

Из (2.3.13) следует, что $R(0) = R(1) = 0$. Покажем, что на интервале $(0,1)$ функция (2.3.13) знакопостоянна. Для этого, рассуждая от противного, полагаем, что существует некоторая точка $\xi \in (0,1)$, в которой функция R меняет знак. В этом случае, в силу теоремы Ролля, производная первого порядка функции R, то есть

$$R^{'}(\mu) := (\alpha+2)\mu^{\alpha+1} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\int\limits_0^{\mu\pi/2} (\sin t)^{mp} dt}{\int\limits_0^{\pi/2} t(\cos t)^{mp} dt},$$

должна иметь на интервале $(0,1)$ не менее двух различных нулей.

Кроме того, с учетом вида числа α в равенстве (2.3.9) получаем, что $R^{'}(0) = R^{'}(1) = 0$. Но тогда по той же теореме Ролля производная второго порядка

$$R^{''}(\mu) := (\alpha+2)(\alpha+1)\mu^{\alpha} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{\left(\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)^{mp}}{\int\limits_0^{\pi/2} t(\cos t)^{mp} dt}$$

должна иметь на $(0,1)$ также не менее трех различных нулей и, кроме того, $R''(0) = 0$. Но функция $R''(\mu)$ является разностью двух положительных функций, одна из которых выпукла вверх и возрастает, а другая выпукла вниз и убывает на отрезке $[0,1]$. Из геометрических соображений очевидно, что функция $R''(\mu)$ на $[0,1]$ не может иметь более двух различных нулей, и мы пришли к противоречию. Полученное противоречие доказывает справедливость первого неравенства из соотношения (2.3.12).

Исходя из второго неравенства (2.3.12), рассмотрим на множестве значений $1 \le \mu < \infty$ вспомогательную функцию

$$R_*(\mu) := \mu^{\alpha+2} - 1 - \frac{\pi^2}{8}(\mu-1)^2 \cdot \left\{ \int\limits_0^{\pi/2} t(\cos t)^{mp} dt \right\}^{-1}. \tag{2.3.14}$$

Учитывая равенство (2.3.9), соотношение (2.3.14) запишем в более удобном виде

$$R_*(\mu) := \mu^{\alpha+2} - 1 - \frac{\pi(\alpha+2)}{4}(\mu-1)^2 \cdot \left\{ \int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{mp} dt \right\}^{-1}. \tag{2.3.15}$$

Дифференцируя равенство (2.3.15), получаем

$$R_*'(\mu) := (\alpha+2)\mu^{\alpha+1} - \frac{\pi(\alpha+2)}{2}(\mu-1) \cdot \left\{ \int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{mp} dt \right\}^{-1}. \tag{2.3.16}$$

Но так как

$$\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{mp} dt \le \frac{\pi}{2},$$

то из равенства (2.3.16) и левой части неравенства (2.3.10) следует, что

$$R_*'(\mu) \ge (\alpha+2)\mu^{\alpha+1} - (\alpha+2)(\mu-1) = (\alpha+2)\left(\mu(\mu^\alpha - 1) + 1\right) > 0$$

для произвольного $\mu \ge 1$ и, так как кроме того $R_*(1) = 0$, то функция R_* на интервале $(1,\infty)$ положительна. Следовательно, и второе неравенство из условия (2.3.12) имеет место. Таким образом теорема 2.3.1 полностью доказана.

Следствие 2.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1. Тогда при* $p = 2/m$ *справедливы равенства*

$$\delta_{2n}\left(W^{(r)}_{m,2/m}(\Phi), L_2\right) = \delta_{2n-1}\left(W^{(r)}_{m,2/m}(\Phi), L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}_{m,2/m}(\Phi)\right) = \frac{1}{n^r}\left\{\frac{\pi^2 n^2}{2(\pi^2-4)}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{m/2},$$

где $\delta_n(\cdot)$ *- любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

В заключение этого параграфа отметим, что утверждение теоремы 2.3.1 является своеобразным обобщение основного результата работы М.Ш. Шабозова и С.Б. Вакарчука [69], где аналогичное утверждение доказано в случае $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$.

§2.4. Точные значения n-поперечников класса $\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)$

В этом параграфе приводим результаты о точных значениях всех перечисленных в первом параграфе второй главы n-поперечников для класса $\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)$ функций $f \in L_2^{(r)}$, удовлетворяющих для произвольных $r, m \in \mathbb{N}$, $2/r < p \leq 2$, $r \geq 2$, $0 < h \leq \pi$ условию

$$\frac{2}{h^2} \cdot \int\limits_0^h t\omega_m^p(f^{(r)}, t)_{L_2} dt \leq \Phi^p(h),$$

где мажаранта $\Phi(t)$, $t \geq 0$ – непрерывная неубывающая функция, в нуле равная нулю.

Имеет место следующая

Теорема 2.4.1. *Если для всех $\mu > 0$, $m, r \in \mathbb{N}$, $2/r < p \leq 2$, $r \geq 2$ мажоранта Φ для любого $u \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(\mu u)}{\Phi^p(u)} \geq \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{\int\limits_0^{\mu\pi/2} t\,(\sin t)_*^{mp}\,dt}{\int\limits_0^{\pi/2} t\,(\sin t)^{mp}\,dt}, \tag{2.4.1}$$

то для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\delta_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi); L_2\right) = \delta_{2n}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi); L_2\right) = E_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m+3/p)} n^{-r} \left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2} t(\sin t)^{mp} dt\right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.4.2}$$

Множество мажорант $\{\Phi\}$, удовлетворяющих условию (2.4.1), не пусто.

Доказательство. В самом деле, полагая в неравенстве (1.6.6) $h = \pi/n$ и используя определение класса $\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)$, запишем оценку сверху рассматриваемых n-поперечников

$$\delta_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi); L_2\right) \leq d_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi); L_2\right) \leq \sup\left\{E_{n-1}(f) : \ f \in \widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} \leq$$

$$\leq 2^{-m} \cdot n^{-r} \cdot \left(\frac{2n^2}{\pi^2} \cdot \int\limits_0^{\pi/n} t \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{-m} \cdot n^{-r} \cdot \left(\frac{2}{\pi^2} \cdot \int\limits_0^{\pi} t \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{-m} \cdot n^{-r} \cdot \left(\frac{8}{\pi^2} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} t \left(\sin t \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{-(m+3/p)} n^{-r} \left(\frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi/2} t (\sin t)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.4.3)$$

Для получения оценки снизу всех рассматриваемых n-поперечников класса $\widetilde{W}^{(r)}_{m,p}(\Phi)$ в множестве $\mathcal{T}_{2n+1} \cap L_2$ введём в рассмотрение $(2n+1)$-мерную сферу полиномов

$$S^*_{2n+1} = \left\{ T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \leq 2^{-(m+3/p)} n^{-r} \left(\frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi/2} t (\sin t)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$$

и докажем, что $S_{2n+1} \subset \widetilde{W}^{(r)}_{m,p}(\Phi)$. Возведя обе части неравенства (2.3.4) в степень p $(2/r < p \leq 2,\ r \in \mathbb{N},\ r \geq 2)$, умножив на t полученное соотношение, проинтегрируем в пределах от 0 до μu, затем в интеграле, расположенном в правой части неравенства, произведём замену переменной $nt = v$, а также норму полинома $T_n(x) \in S^*_{2n+1}$ заменим радиусом сферы. В результате всего этого имеем:

$$\frac{2}{(\mu u)^2} \cdot \int\limits_0^{\mu u} t\, \omega_m^p(T_n^{(r)}; t) dt \leq$$

$$\leq 2^{mp} \cdot n^{rp} \cdot \|T_n\|^p \cdot \frac{2}{(\mu u)^2} \cdot \int\limits_0^{\mu u} t \left(\sin \frac{nt}{2} \right)_*^{mp} dt \leq$$

$$\leq 2^{mp}\cdot n^{rp}\pi^2\cdot\frac{2}{(\mu u)^2}\cdot\frac{\int\limits_0^{\mu u} t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*^{mp}dt}{\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{mp}dt}\cdot\Phi^p\left(\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=\Phi^p\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi^2}{(\mu n u)^2}\cdot\frac{\int\limits_0^{\mu n u/2} t\,(\sin t)_*^{mp}dt}{\int\limits_0^{\pi/2} t\,(\sin t)^{mp}\,dt}. \tag{2.4.4}$$

В правой части неравенства (2.4.4), введя обозначение $u = \pi/n$ и используя ограничение (2.4.1), приходим к неравенству

$$\frac{2}{(\mu u)^2}\int\limits_0^{\mu u} t\,\omega_m^p(T_n^{(r)};t)dt\leq$$

$$\leq\Phi^p(u)\cdot\frac{1}{\mu^2}\cdot\frac{\int\limits_0^{\mu\pi/2} t\,(\sin t)_*^{mp}\,dt}{\int\limits_0^{\pi/2} t\,(\sin t)^{mp}\,dt}\leq\Phi^p(\mu u).$$

Отсюда следует включение $S_{2n+1}\subset\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)$. Используя неравенство (2.1.10) между n-поперечниками и определение бернштейновского n-поперечника, запишем оценку снизу рассматриваемых аппроксимационных величин

$$\delta_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi);L_2\right)\geq\delta_{2n}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi);L_2\right)\geq b_{2n}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)\geq$$

$$\geq b_{2n}\left(S_{2n+1};L_2\right)\geq 2^{-(m+3/p)}n^{-r}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2} t(\sin t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.4.5}$$

Сопоставляя неравенства (2.4.3) и (2.4.5), с учётом (2.1.10) получаем требуемые равенства (2.4.2). Приводим пример мажоранты, для которой выполняется условие (2.4.1). Положим $\Phi_*(h) = h^{\alpha/p}$, где

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} t\ (\sin t)^{mp}\, dt\right)^{-1} - 2. \qquad (2.4.6)$$

Докажем, что для границы значений числа $\alpha := \alpha(m,p)$, определённой равенством (2.4.6), выполняется соотношение

$$0 < \alpha < mp. \qquad (2.4.7)$$

Заметим, что при любом $0 \le t \le \pi/2$ имеет место неравенство

$$\frac{2}{\pi} \cdot t \le \sin t \le 1,$$

а потому, оценивая число α снизу, имеем

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} t\ (\sin t)^{mp}\, dt\right)^{-1} - 2 \ge$$

$$\ge \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} t dt\right)^{-1} - 2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 - 2 = 0,$$

а потому имеет место оценка снизу в (2.4.7).

Аналогично, для оценки α сверху имеем

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} t\ (\sin t)^{mp}\, dt\right)^{-1} - 2 \le$$

$$\le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} t\ \left(\frac{2}{\pi} t\right)^{mp} dt\right)^{-1} - 2 =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{mp} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{mp+2} \cdot (mp+2) - 2 = mp.$$

Этим неравенство (2.4.7) установлено.

Условие (2.4.1), выполнение которого должны доказать для функции Φ_*, в рассматриваемом случае запишем в виде

$$\mu^{\alpha+2} \geq \frac{\int\limits_0^{\mu\pi/2} t\,(\sin t)_*^{mp}\,dt}{\int\limits_0^{\pi/2} t\,(\sin t)^{mp}\,dt}. \tag{2.4.8}$$

Учитывая равенство (2.4.6), неравенство (2.4.8) перепишем в виде

$$\mu^{\alpha+2} \geq (\alpha+2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2} \int\limits_0^{\mu\pi/2} t\,(\sin t)_*^{mp}\,dt, \quad 0 < \mu < \infty. \tag{2.4.9}$$

Очевидно, что равенство (2.4.6) есть результат приравнивания производных по μ обеих частей неравенства (2.4.8) при $\mu = 1$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$R(\mu) := \mu^{\alpha+2} - (\alpha+2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2} \int\limits_0^{\mu\pi/2} t\,(\sin t)_*^{mp}\,dt. \tag{2.4.10}$$

В бесконечно малой окрестности нуля с учётом (2.4.10) имеем

$$R(\mu) = \mu^{\alpha+2} - (\alpha+2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2} \int\limits_0^{\mu\pi/2} t\left(\frac{2}{\pi}t\right)^{mp} dt =$$

$$= \mu^{\alpha+2} - (\alpha+2)\int\limits_0^{\mu} t^{mp+1}dt = \mu^{\alpha+2}\Big(1 - O(\mu^{mp-\alpha})\Big). \tag{2.4.11}$$

Следовательно, при $\mu \to 0+0$ из (2.4.11) и (2.4.7) получаем $R(\mu) > 0$. Из (1.5.9) и (1.4.5) имеем $R(0) = R(1) = 0$. Покажем, что на интервале $(0,1)$ функция (2.4.10) является неотрицательной. Рассуждая методом от противного, допускаем, что в некоторой точке $\xi \in (0,1)$ функция R меняет знак. В силу теоремы Ролля производная первого порядка функции R, то есть

$$R'(\mu) = (\alpha+2)\mu^{\alpha+1} - (\alpha+2)\mu\left(\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)^{mp} =$$

$$= (\alpha+2)\mu\left[\mu^\alpha - \left(\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)^{mp}\right] := (\alpha+2)\mu R_1(\mu), \tag{2.4.12}$$

должна иметь на интервале $(0,1)$ не менее двух различных нулей. Кроме того, из (2.4.12) следует, что $R'(0)=R'(1)=0$. Но это означает, что столько же различных нулей на интервале $(0,1)$ и в тех же точках имеет функция

$$R_*(\mu) := \mu^{1/mp}\left(\mu^{\alpha/mp} - \sin\frac{\mu\pi}{2}\right).$$

Из последнего равенства следует, что функция

$$R_{**}(\mu) = \mu^{\alpha/mp} - \sin\frac{\mu\pi}{2} \tag{2.4.13}$$

на указанном интервале $(0,1)$ имеет не менее четырёх различных нулей, поскольку функция $\mu^{1/mp}$ внутри интервала $(0,1)$ в нуль не обращается. Пос–кольку в силу левой части (2.4.7) и соотношения (2.4.13) $R_{**}(0)=R_{**}(1)=0$, то функция

$$R'_{**}(\mu) = \frac{\alpha}{mp}\mu^{(\alpha/mp)-1} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\mu\pi}{2} \tag{2.4.14}$$

на основании теоремы Ролля должна иметь на $(0,1)$ не менее трёх различных нулей. Из (2.3.14) и правой части неравенства (2.4.7) следует, что на интервале $(0,1)$ $R'_{**}(\mu)$ является разностью двух положительных функций, одна из которых монотонно убывает и выпукла вниз, а другая монотонно убывает и выпукла вверх, а потому функция $R'_{**}(\mu)$ может иметь не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает, что $R(\mu)>0$ для любого $\mu\in(0,1)$.

Пусть теперь $1\le\mu<\infty$. Тогда на основании (2.3.5) и (2.4.6) функция $R(\mu)$ из равенства (2.4.10) примет следующий вид

$$R(\mu) = \mu^{\alpha+2} - (\alpha+2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2}\left[\int\limits_0^{\pi/2} t(\sin t)^{mp}dt + \int\limits_{\pi/2}^{\mu\pi/2} tdt\right] =$$

$$= \mu^{\alpha+2} - (\alpha+2)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2}\cdot\int\limits_0^{\pi/2} t(\sin t)^{mp}dt - (\alpha+2)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}(\mu^2-1) =$$

$$= \mu^{\alpha+2} - 1 - \frac{\alpha+2}{2}(\mu^2-1). \tag{2.4.15}$$

Из (2.4.15) получаем

$$R'(\mu) = (\alpha + 2)\mu(\mu^{\alpha} - 1). \tag{2.4.16}$$

В силу левой части (2.4.6) из (2.4.16) получаем, что $R'(\mu) \geq 0$ на полуинтервале $[1, \infty)$. Поскольку, как следует из (2.4.15), $R(1) = 0$, то $R(\mu) \geq 0$ на указанном точечном множестве, что и означает выполнение неравенства (2.4.9), а значит и условие (2.4.1) справедливо для Φ_* при любом $\mu \in (0, \infty)$. Теорема доказана.

Следствие 2.4.1. *При любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$ справедливы равенства*

$$\delta_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi_*); L_2\right) = \delta_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi_*); L_2\right) = E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi_*)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m+3/p)}\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^{1/p}\pi^{\alpha/p}\, n^{-r-\alpha/p},$$

где $\delta_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- Найдены точные неравенства типа Джексона-Стечкина между величинами наилучших среднеквадратических приближений периодических дифференцируемых функций и модулями непрерывности высших порядков r-ых производных функций.
- Найдены точные верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка.
- Вычислены точные значения различных n-поперечников на классов функций, задаваемых усредненными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных.

Дальнейшее продолжение исследований по теме диссертации может быть связано с оптимизацией точных констант в неравенстве Джексона-Стечкина для других модификаций модулей непрерывности с целью выявления точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина среди различных неравенств указанного типа. Кроме того, это даст возможность выбора конкретной модификации модуля непрерывности при определении функциональных классов в задаче отыскания точных значений n-поперечников, исходя из содержательной сущности исследуемых задач.

Список литературы

1. Арестов В.В., Попов В.Ю. Неравенство Джексона на сфере в L_2 Арестов В.В., Попов В.Ю.// Известия вузов. 1995, №8. С.13-20.

2. Арестов В. В., Бердышев В. И., Субботин Ю. Н., Черных Н. И. С. Б. Стечкин и теория приближений //Тр. ИММ УрО РАН, 4 (1996), 3 – 16

3. Ахиезер Н.И., Крейн М.Г. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // ДАН СССР. 1937. Т.15. С.107-112.

4. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука. 1965. 406 с.

5. Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т.39, №5. С.651-664.

6. Бабенко А.Г. Точное неравенство Джексона-Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т.5, С.183-198.

7. Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т. Неравенства Джексона-Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Матем. заметки. 1999. Т.65, №6. С.928-932.

8. Бабенко А.Г. О неравенстве Джексона-Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т.7, №1. С.30-46.

9. Бабенко А.Г., Долматова Н.В., Крякин Ю.В. Точное неравенство Джексона со специальным модулем непрерывности // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т.18, №4. С.51-67.

10. Baraboshkina N.A. The Least Constant in Jackson's Inequality for Best Approximations of Functions in L^2 by Finite-Dimensional Subspaces // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 2004, №1. P.128-136.

11. Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p // Труды Матем. ин-та АН СССР. 1967. Т.88. С.3-16.

12. Вакарчук С.Б. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из L_2 // Матем. заметки. 1999. Т.66, №4. С.494-499.

13. Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Матем. заметки. 2001. Т.70, №3. С.334-345.

14. Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. 2004. Т.56, №11. С.1458-1466.

15. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. 2005. Т.78, №5. С.792-796.

16. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т.80, №1. С.11-19.

17. Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East Journal on Approximation. Bulgarian Academy of Sciences: Sofia. 2008. V.14, №4. P.411-421.

18. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2009. Т.86, №3. С.328-336.

19. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. 2012. Т.92, №4. С.497-514.

20. Васильев С.Н. О неравенстве Джексона-Стечкина в L_2 // Теория приближения функций и операторов: тез. докл. Междунар. конф.,

посвящ. 80-летию со дня рождения С.Б. Стечкина. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та. 2000. С.49-50.

21. Васильев С.Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечноразностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 2002. Т.385, №1. С.11-14.

22. Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherunger stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung // Preisschrift und Dissertation. Universitat Göttingen. 1911.

23. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т.17. С.135-162.

24. Жук В.В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций // ДАН СССР. 1967. Т.201. С.263-266.

25. Жук В.В. О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // Сиб. матем. журнал. 1971. Т.12, №6. С.1283-1291.

26. Иванов В.И., Чертова Д.В., Лю Юнпин. Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1, 1]$ со степенным весом // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т.14, №3. С.112-126.

27. Иванов В.И. Точные L_2-неравенства Джексона–Черных–Юдина в теории приближений // Изв. Тульского госуниверситета. Естественные науки. 2012, №3. С.19-28.

28. Quade E.S. Trigonometric approximation in the mean // Duke Math., Journ. 1937. V.3. P.529-543.

29. Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math. 1936. V.37. P.107-110.

30. Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. 1962. Т.145, №3. С.514-516.

31. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука. 1976. 320 с.

32. Корнейчук Н.П. О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки. 1982. Т.32, №5. С.669-674.

33. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука. 1987. 424 с.

34. Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchÿee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. Soc. math. de France. 1910. V.38. P.184-210.

35. Лигун А.А. О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. 1973. Т.14, №1. С.21-30.

36. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. 1978. Т.24, №6. С.785-792.

37. Лигун А.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки. 1985. Т.38, №2. С.248-256.

38. Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1988. Т.43, №6. С.757-769.

39. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т.10.

С.295-332.

40. Палавонов К.К. Значение поперечников некоторых классов периодически дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$ //Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математического анализа и теории функций"(Душанбе,29-30 июня 2012 г. С.123-124).)

41. Палавонов К.К. О наилучшем приближении периодических функций и значениях поперечников функциональных классов в L_2. //Изв. АН. РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и тезн. н. 2013, №2(151). С.40-50

42. Палавонов К.К. Приближение функций в $L_2[0,2\pi]$ и значение поперечников некоторых классов функций //ДАН. РТ. 2014. Т.57, №6. С.452-458

43. Палавонов К.К. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций в $L_2[0,2\pi]$ // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и её преподавания посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд. 2014, 2(150). С.65-68).

44. Палавонов К.К. Точные значение поперечников некоторых классов периодических функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$ // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г. С.36-37)

45. Палавонов К.К. О некоторых аппроксимационных величинах и их совпадение на класс функций // Материалы международной научной конференции "Математический анализа, дифференциальные уравнения и теория чисел"(Душанбе, 29-30 октябр 2015 г. С.52-54).

46. Палавонов К.К. Значение поперечников некоторых классов

периодически дифференцируемых функций в пространстве L_2 //Труды Международной летней математической Школы–Конференции С.Б. Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа 2016 г. С.195-198).

47. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. 252 p.

48. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наукова думка. 1981. 340с.

49. Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Серия матем. 1951. Т.15. С.219-242.

50. Стечкин С.Б. О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара, // Труды МИАН. 1971. Т.109. С26-34.

51. Стечкин С.Б. О наилучшем приближении некоторых классов перио–дических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1956. Т.20. С.643-648.

52. Сунь Юн-шен. О наилучшем приближении периодических дифферен–цируемых функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР, Сер. Матем. 1959. Т.23. С.67-92.

53. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т.20, №3. С.433-438.

54. Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Матем. заметки. 1977. Т.22, №4. С.535-542.

55. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. 1979. Т.25, №2. С.217-223.

56. Тайков Л.В. О приближении в среднем некоторых классов периодических функций //Труды МИАН. 1988. Т.88. С.61-70.

57. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ. 1976. 325 с.

58. Фавар Ж. Sur les meilleurs prosedes d'approximation de certains classes de functions par des polynomes trigonometriques // Bull Sci. Math. 1937. V.61. P.243-256.

59. Focart S., Kryakin Yu and Shardin A. On the exact constant in the Jacson – Stechkin inequality for the uniform metric // Constr. Approx. 1999. V.65, №6. P. 157–179.

60. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т.2, №5. С.513-522.

61. Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН СССР. 1967. Т.88. С.71-74.

62. Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ $(1 \le p < 2)$ с точной константой // Труды МИРАН. 1992. Т.198. С.232-241.

63. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т.87, №4. С.616-623.

64. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т.90, №5. С.764-775.

65. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибир. матем. журнал. 2011. Т.52, №6. С.1414-1427.

66. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 // Journ. of Approx. Theory. 2012. V.164. Issue 1. P.869-878.

67. Шабозов М.Ш., Палавонов К.К. Точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина и поперечники классов функций в L_2 //ДАН. РТ. 2011. Т.54, №10. С.793-800.

68. Shabozov M.Sh., Palavonov K.K. Exact values of width sofcertain classes of periodic differentiable functions in the space $L_2[0, 2\pi]$ //Analysis Mathematica. 2015. V.41. P.103 – 115.

69. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012. V.38, №2. P.154-165.

70. Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. 1991. Т.43, №1. С.125-129.

71. Юдин В.А. Диофантовы приближения в экстремальных задачах // ДАН. СССР. 1980. Т.251, №1. С.54-57.

72. Юдин В.А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т.29, №2. С.309-315.