ОТЗЫВ НАУЧНОГО КОНСУЛЬТАНТА
на диссертацию Тухлиева Камаридина
„Некоторые экстремальные задачи теории приближения
и поперечники классов функций”,
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Теория приближения функций – одна из центральных ветвей математического анализа, возникшая в результате потребностей практики, продолжает интенсивно развиваться на протяжения многих десятилетий. Основным объектом этой теории является приближение сложных объектов более простыми и удобными. Фундамент теории приближения был заложен классическими работами П.Л.Чебышёва о наилучшем равномерном приближении функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами и К.Ф.Вейерштрасса, доказавшего классическую теорему о приближении непрерывных функций многочленами. Дальнейшее развитие этой теории в значительной мере определили работами А.Лебега, Ш.Валле-Пуссена, Д.Джексона, С.Н.Бернштейна, А.Н.Колмогорова, А.Зигмунда, Ж.Фавара, М.Г.Крейна и Н.И.Ахиезера. Современное развитие теории приближений связано с работами С.М.Никольского, С.Б.Стечкина, А.Ф.Тимана, П.Л.Ульянова, В.К.Дзядыка, Н.П.Корнейчука, В.М.Тихомирова и их учеников, последователей и многих других математиков. Благодаря работам указанных учённых были установлены разнообразные связи между структурными и конструктивными свойствами функций, в первую очередь со скоростью стремления к нулю их наилучших полиномиальных приближений.

В настоящее время стремительное развитие теории приближения в основном связано с решениями экстремальных задач вариационного содержания, задаваемых на классах функций, где требуется найти точную верхнюю грань погрешности заданным методом на фиксированном классе функций или указать для этого класса наилучший аппарат (наилучший метод) приближения.

В диссертационной работе К.Тухлиева решается ряд конкретных экстремальных задач теории приближения, связанных с:

а) наилучшим приближением периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве L_2 и вычислением значений поперечников классов функций, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми последовательными итерациями Стеклова (глава I);

б) наилучшим полиномиальным приближением функций частными суммами Фурье-Бесселя и вычислением точных значений поперечников классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором Бесселя второго порядка (глава II);

в) наилучшим приближением функций, интегрируемых с квадратом на всей оси, целыми функциями экспоненциального типа и вычислением точных значений средних ν-

поперечников некоторых классов функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ (глава III);

г) отысканием наилучших квадратурных формул приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций многих переменных и пространственных кривых, задаваемых ограничением на норму градиента функций и мажорантами модулей непрерывности (глава IV).

Перечисленные выше экстремальные задач относятся к наиболее сложным задачам современной теории аппроксимации и, безусловно, их решения вносит серёзный вклад в развитие общей теории аппроксимации функций в различных банаховых пространствах. Этим обосновывается актуальность выбранной темы диссертационной работы.

Диссертационная работа состоит из введения, четерёх глав, списка литературы из 164 наименований, составляет 236 страниц, набранных на LaTeXе.

Во введении излагается история вопроса, постановка задач, а также формулируются основные результаты. Дадим краткую характеристику результатов по главам, придерживаясь обозначений, принятых в диссертационной работе.

В первой главе исследуются экстремальные задачи теории наилучших среднеквадратических приближений периодических функций тригонометрическими полиномами на классах функций, обобщенный модуль непрерывности $\Omega_m(f,t)$ которых определяется m-кратной итерацией функции Стеклова. Исследуется задача отыскания точных констант в неравенствах Джексона – Стечкина, вычисляются точные значения целой серии n-поперечников (бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных, проекционных) классов функций, задаваемых усреднёнными с весом обобщенными модулями непрерывности m-го порядка $\Omega_m(f,t)$. В этой же главе в качестве второй модификации классического модуля непрерывности рассматривается усреднённая характеристика гладкости, введённая К.В.Руновским и Н.Н.Пустовойтовым. Для этой характеристики решаются экстремальные задачи на классах функций, определяемых производными дробного порядка Вейля. Ранее ряд экстремальных задач теории аппроксимации, связанные с понятием дробной производной рассматривались в работах А.И.Козко, М.Г.Есмаганбетова, М.Ш.Шабозова, С.Д.Темурбекова, Г.А.Юсупова и др.

Рассматривается экстремальная характеристика

$$\chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m,q,h)=\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq const}}\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)},t)q(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{1}$$

где $m,n\in\mathbb{N},\ \alpha\geq 0,\ p\in\mathbb{R}_+,\ 0<h\leq\pi/n,\ q\geq 0$ — весовая функция на отрезке $[0,h]$. Одним из основных результатов первой главы является

Теорема 1.2.1. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $\alpha\geq 0$, $0<p\leq 2$, $0<h\leq\pi/n$, $n\in\mathbb{N}$, q *– весовая функция на отрезке* $[0,h]$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\Big\{A_{n,m,\alpha,p}(q,h)\Big\}^{-1}\leq\chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m,q,h)\leq\Big\{\inf_{n\leq k<\infty}A_{k,m,\alpha,p}(q,h)\Big\}^{-1}, \tag{2}$$

где

$$A_{k,m,\alpha,p}(q,h)=\left(k^{\alpha p}\int\limits_0^h(1-\sin ckt)^{mp}\,q(t)dt\right)^{1/p},\quad k\geq n.$$

Двустороннее неравенство (2) для обычных модулей непрерывности $\omega_m(f^{(r)},t)$, $r\in\mathbb{N}$, $0<t\leq 3\pi/(4n)$, при $p=2$ ранее было доказано А.А.Лигуном, а в случае $0<p\leq 2$ М.Ш.Шабозовым и Г.А.Юсуповым. Теорема 1.2.1 является распространением указанного результата для специального модуля непрерывности $\Omega_m(f^{(\alpha)},t)$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $0<t\leq\pi$. Указываются необходимые и достаточные условия, при которых левая и правая части неравенства (1) совпадают. В этой же главе рассматривается экстремальная задача в более общей ситуации для классов свёрток

$$f(x)\overset{def}{=}(\mathcal{K}*\varphi)(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{K}(x-t)\varphi(t)dt. \tag{3}$$

Для изучения аппроксимативных свойств свёртки (3) вводится в рассмотрение экстремальная характеристика

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m,q,h)=\sup_{\substack{\varphi\in L_2\\ \varphi\neq const}}\frac{|a_n|^{-1}E_{n-1}(\mathcal{K}*\varphi)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\varphi,t)q(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{4}$$

где $m,n\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{R}_+$, $0<h\leq\pi/n$, $a_n=a_n(\mathcal{K})$ — n-й коэффициент Фурье функции $\mathcal{K}$, q — весовая функция на отрезке $[0,h]$.

Теорема 1.3.1. *Пусть $0<p\leq 2$, коэффициенты Фурье $a_k:=a_k(\mathcal{K})$ ядро $\mathcal{K}\in L_2$ удовлетворяют условиям*

$$|a_0|\neq 0,\quad |a_k|k^{1/p}\geq|a_{k+1}|(k+1)^{1/p},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Пусть $h>0$. Если $q\geq 0$ — невозрастающая весовая функция на $[0,h]$, то величина (4) при любых $m,n\in\mathbb{N}$ и $0<h\leq 3\pi/(4n)$ удовлетворяет равенству

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m,q,h)=\left(\int\limits_0^h(1-\mathrm{sinc}\ nt)^{mp}\,q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{6}$$

Существует свёртка $f_0:=(\mathcal{K}*\varphi_0)$, $\varphi_0\in L_2$, $\varphi_0\neq\mathrm{const}$, реализующая верхнюю грань в (4), равная правой части (6).

Пусть $\Phi(t)\geq 0$ — произвольная возрастающая на $[0,\infty)$ функция, такая, что $\Phi(0)=0$. При $m,n\in\mathbb{N}$, $0<h\leq 3\pi/(4n)$, $0<p\leq 2$ в случае, когда весовая функция $q\equiv 1$, введём в рассмотрение класс функций

$$W(\Phi,\mathcal{K})\overset{def}{=}W(m,p,\Phi,\mathcal{K})=\left\{\mathcal{K}*\varphi:\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^p(\varphi,t)dt\leq\Phi^p(h)\right\}.$$

Теорема 1.4.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$ *и мажоранта* Φ *при любых значениях* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет ограничению*

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)}\right)^p \ge \frac{\pi}{nh}\int\limits_0^{nh}(1-\operatorname{sinc} t)_*^{mp}\,dt\left(\int\limits_0^{\pi}(1-\operatorname{sinc} t)^{mp}\,dt\right)^{-1}, \tag{7}$$

где

$$\big(1-\operatorname{sinc} t\big)_* := \Big\{\ 1-\operatorname{sinc} t,\ \text{если } 0 < t \le t_*, \quad 1-\operatorname{sinc} t_*,\ \text{если } t_* \le t < \infty\Big\},$$

t_* *— наименьший положительный корень уравнения* $t = \operatorname{tg} t$ $\ (4,49 < t_* < 4,51)$.

Коэффициенты Фурье $a_k := a_k(\mathcal{K})$ *функции (ядро)* $\mathcal{K}$ *удовлетворяют условиям* (5) *теоремы* 1.3.1. *Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W(\Phi,\mathcal{K}),L_2) = \lambda_{2n-1}(W(\Phi,\mathcal{K}),L_2) = E_{n-1}(W(\Phi,\mathcal{K}))_{L_2} =$$
$$= |a_n|\cdot\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-sinc\ \tau)^{mp}\,d\tau\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_k(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих ограничению* (7), *не пусто.*

При конкретных значениях коэффициентов $a_n(\mathcal{K})$ и явном виде ядра $\mathcal{K}$ (например, когда $\mathcal{K}$ – ядро Бернулли) из теоремы 1.4.2 в качестве следствия получены результаты для классов функций, дифференцируемых в смысле Вейля. Отметим, что аналогичные результаты получены для характеристики гладкости, ранее введённой в работе Н.Н.Пустовойтова: „*Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усреднённые разности и многомерная теорема Джексона // Матем. сборник. 1997. Т. 188, №10. С.95-108*”.

Вторая глава диссертации посвящена решению некоторых экстремальных задач приближения функций частными суммами ряда Фурье – Бесселя в пространстве $L_2 := L_2[(0,1),xdx]$ суммируемых с квадратом функций $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ с весом x и вычислением значения поперечников некоторых функциональных классов.

Доказано точное неравенство типа Джексона – Стечкина на множестве $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, связывающее величину $E_{n-1}(f)_2$ – наилучшее приближении функции f частичными суммами порядка $n-1$ ряда Фурье – Бесселя, с усреднённым с весом обобщённого модуля непрерывности m-го порядка $\widetilde{\Omega}_m(\mathcal{D}^r f,t)$, где $\mathcal{D} := \dfrac{d^2}{dx^2}+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{d}{dx}-\dfrac{\nu^2}{x^2}$ – дифференциальный оператор Бесселя второго порядка первого рода индекса ν. Конструкция обобщённого модуля непрерывности m-го порядка $\widetilde{\Omega}_m(\mathcal{D}^r f,t)$ операется на конкретного оператора сдвига.

Одним из основных утверждений второй главы является следующая

Теорема 2.2.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$, $0 < h < 1$, φ *– весовая функция на интервале* $(0,h)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\widetilde{\Omega}_m^p(\mathcal{D}^r,t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}.$$

где $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– занумерованные в порядке возрастания положительные корни уравнения* $J_\nu(x)=0$*, а* $J_\nu(x)$ *– функция Бесселя первого рода индекса* ν*.*

Из теоремы 2.2.1 при различных конкретных весовых функциях в качестве следствия вытекают различные точные результаты. Так, например, доказано, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\widetilde{\Omega}_m^p(\mathcal{D}^r f,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}}=\frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \tag{8}$$

В свою очередь из (8) при $p=1/m, m\in\mathbb{N}$ сразу следует равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}}=\frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

Используя результат теоремы 2.2.1, найдены точные значения n-поперечников классов $\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\widetilde{\Omega}_m,h,\varphi)$ – функций $f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, у которых $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^h\widetilde{\Omega}_m^p(\mathcal{D}^r f,t)\varphi(t)dt\le 1,$$

где $h\in(0,1),\ 0<p\le 2,\ m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ \varphi$ – весовая функция на $(0,h)$. Доказана

Теорема 2.4.1. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le 2$, $0<h<1$, $\varphi\ge\ 0$ *— весовая функция на* $[0,h]$*. Тогда для любой* $n\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\widetilde{\Omega}_m,h,\varphi),L_2)=E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\widetilde{\Omega}_m,h,\varphi))_{L_2}=$$

$$=\lambda_n^{-2r}\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *– любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot),d^n(\cdot),d_n(\cdot),\delta_n(\cdot),\Pi_n(\cdot)$*.*

Для пары пространств L_2 и $L_2^{(m)}\mathcal{D}$ введена в рассмотрение $\mathcal{K}$-функционал Петре

$$\mathcal{K}(f,t^m):=\mathcal{K}\big(f,t^m,L_2,L_2^{(m)}(\mathcal{D})\big)=\inf\Big\{\|f-g\|+t^m\|\mathcal{D}^m g\|:\ g\in L_2^{(m)}\mathcal{D}\Big\},$$

где $m\in\mathbb{N},\ 0<t<1$ и доказана слабая эквивалентность $\mathcal{K}$-функционала и модуля непрерывности $\widetilde{\Omega}_m(f,t)$. Завершающий параграф второй главы посвящен вычислению точных значений n-поперечников классов функций, задаваемых посредством $\mathcal{K}$-функционала. Символом $\mathrm{W}_{m,k}^{(r)}(\mathcal{K},\Phi), r\in\ \mathbb{Z}_+\ m\in\mathbb{N}$ обозначим класс функций $f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, для которых функция $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию $\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f,t^m)\le\Phi(t^m)$, $0<t\le 1$, где Φ – функция, для которой $\Phi(0)=0$ и $\Phi(t)/t$ не возрастает на $(0,\infty)$. Здесь доказана следующая

Теорема 2.5.1. *Пусть* $r\in\mathbb{Z}_+,m\in\mathbb{N}$*. Тогда для произвольного* $n\in\mathbb{N}$*, имеют место равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_{m,k}^{(r)}(\mathcal{K},\Phi),L_2)=E_n(\mathrm{W}_{m,k}^{(r)}(\mathcal{K},\Phi))_{L_2}=\lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}),$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

В третьей главе диссертации изучается ряд экстремальных задач приближения функций $f \in L_2(\mathbb{R})$ на всей оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ целыми функциями экспоненциального типа. Впервые вопросы приближения функций, заданных на всей оси, начал изучать С.Н.Бернштейн, а дальнейшее развитие этой тематики связано с именами Н.Винера, Н.И.Ахиезера, М.Г.Крейна, С.М.Никольского, П.Боаса, А.Ф.Тимана, И.И.Ибрагимова и многих других. Напомним, что результаты, связанные с отысканием точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина для приближение $f \in L_2(\mathbb{R})$ целыми функциями, получены И.И.Ибрагимовым и Ф.Г.Насибовым, В.Ю.Поповым, С.Б.Вакарчуком и другими. Результаты, полученные в этих работах, послужили основанием для введением понятия средних ν-поперечников, базирующихся на понятии средней размерности, введенном В.М.Тихомировым. Это понятие позволило Г.Г.Магарил-Ильяеву определить асимптотические характеристики подпространств, подобных поперечникам, где роль обычной размерности выполняла средняя размерность. Г.Г.Магарил-Ильяев, в частности, вычислил точные значения средних ν-поперечников для соболевских классов функций с ограниченным по норме пространством $L_p(\mathbb{R})\,(1 \le p \le \infty)$ r-й производной $f^{(r)}(x)$ на всей оси. В дальнейшем эта тематика была развита в работах С.Б.Вакарчука, С.Б.Вакарчука и В.Г.Доронина, Г.А.Юсупова, М.Р.Лангаршоева и других.

В третьей главе структурные свойства функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ характеризуются специальным модулем непрерывности

$$\Omega_m(f;t)_{L_p(\mathbb{R})} = \sup\left\{ \|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})} :\ h \in (0,t] \right\},$$

где

$$\Delta_h^m(f;x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} S_h^k f(x),$$

$$S_h^k f(x) = S_h\left(S_h^{k-1} f(x)\right), k = \overline{1,m}; \quad S_h f(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt,\ h > 0$$

– функция Стеклова. Одним из основных результатов третьей главы является

Теорема 3.2.2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \le 3\pi/(4\sigma)$, $\psi(\tau)$ – некоторая суммируемая на отрезке $[0,t]$ функция, тождественно не равная нулю. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sigma^s \mathcal{A}_\sigma(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}}{\left(\int_0^t \Omega_m^p(f^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/p}} = \left(\int_0^t \left(1 - \frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mp} \psi(\tau)d\tau\right)^{-1/p},$$

где $s = 0, 1, \ldots, r$. Здесь $\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-s)})$ – наилучшее приближение производной $f^{(r-s)} \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$ элементами подпространства $\mathcal{B}_{\sigma,2}$–целых функций экспоненциального типа σ, принадлежащих $L_2(\mathbb{R})$.

В третьем параграфе этой главы вычислены точные значения средних ν-поперечников. Пусть

$$W_p^{(r)}(\Omega_m;\Psi_2)=\left\{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R}):\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p(f^{(r)};t)_2dt\le\Psi_2^p(h)\right\},$$

где $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le 2$, $0<h<\infty$, $\Psi_2(t),t\ge 0$ – произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Psi_2(0)=0$.

В этих обозначениях справедливо следующее утверждение

Теорема 3.3.3. *Если для всех $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $0<h\le 3\pi/(4\sigma)$, $m\in\mathbb{N}$, $0<p\le 2$, а мажоранта Ψ_2 удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Psi_2(h)}{\Psi_2(\pi/(2\sigma))}\right)^p\ge\left(\frac{\pi}{2\sigma h}\right)^2\left(\int\limits_0^{\sigma h}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp}dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^{\pi}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p},\tag{3}$$

то при $\sigma=\nu\pi,\nu\in\mathbb{R}_+$ и любом $r\in\mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\overline{\mu}_\nu\left(W_p^{(r)}(\Omega_m;\Psi_2),\,L_2(\mathbb{R})\right)=$$

$$=A_{\nu\pi}\left(W_p^{(r)}(\Omega_m;\Psi_2)\right)_{L_2(\mathbb{R})}=\mathcal{E}_{\nu\pi}\left(W_p^{(r)}(\Omega_m;\Psi_2);(L_2(\mathbb{R}),\Lambda_{\nu\pi}^*)\right)_{L_2(\mathbb{R})}=$$

$$=2^{-3m}(\pi\nu)^{-r}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Psi_2\left(1/(2\nu)\right),$$

где $\overline{\mu}_\nu(\cdot)$ – любой из средних ν-поперечников $\overline{b}_\nu(\cdot)$, $\overline{d}_\nu(\cdot)$, $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$, а $\mathcal{E}_\nu(\mathfrak{M};(L_2^{(r)}(\mathbb{R}),\Lambda)):=$ $\sup\{\|f-\Lambda f\|_{L_2(R)}:f\in\mathfrak{M}\}$. *При этом пара $(L_2(R),\Lambda_{\nu\pi}^*)$, где $\Lambda_{\nu\pi}^*$, определяется из условия*

$$\mathcal{F}\left(\Lambda_{\nu\pi}^*f,\cdot\right)=\chi_{\nu\pi}(\cdot)\mathcal{F}(f,\cdot),$$

($\mathcal{F}$ – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}),\chi_{\nu\pi}$ – характеристическая функция интервала $(-\nu\pi,\nu\pi)$) будет экстремальной для среднего линейного поперечника $\overline{\delta}_\nu\left(W_p^{(r)}(\Omega_m;\Psi_2),L_2(\mathbb{R})\right)$, а пространство $\mathcal{B}_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu\left(W_p^{(r)}(\Omega_m;\Psi_2),L_2(\mathbb{R})\right)$. Множество мажорант, удовлетворяющих условию (3), не пусто.

В завершающем четвёртом параграфе третьей главы рассматривается задача отыскания верхних граней оценки остатка преобразования Фурье на некоторых классах функций. Полученные в этом параграфе результаты являются точными и, в частности, содержат результаты Е.Титчмарша и недавно полученные результаты В.А.Абилова, Ф.В.Абиловой и М.К.Керимова.

В четвёртой главе диссертации рассматривается задача отыскания наилучших квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода. Этот вопрос для регулярных интегралов изучен с достаточной полнотой, а наиболее важные результаты по этой тематике изложены в дополнении к известной монографии С.М.Никольского "Квадратурные формулы", последнее издание которой вышло из печати в 1988 г. Проблема отыскания наилучших в смысле С.М.Никольского квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций и классах кривых находится на стадии разработки. Некоторые результаты получены в недавно опубликованных работах С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова, Ф.М.Мирпоччоева и Д.С.Сангмамадова.

В четвёртой главе диссертации К.Тухлиева рассматривается экстремальная задача отыскания наилучших квадратурных формул приближённого интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности, и на классах дифференцируемых функций, у которых нормы первого и второго градиента ограничены по норме пространства $L_p, 1 \leq p \leq \infty$. Для исследуемых классов функций и кривых указан явный вид оптимальных узлов и коэффициентов наилучших квадратурных формул, вычислены точные оценки погрешности. В частности, доказано, что на классах функций и кривых в $\mathbb{R}^m$, задаваемых модулями непрерывности в случае произвольного расположения узлов на отрезке $[0, L]$ (L – длина кривой), наилучшей в смысле С.М.Никольского является формула прямоугольников, а с произвольным расположением внутри $[0, L]$ узлов, но с фиксированными крайними узлами ($t_0 = 0,\ ,\ t_N = L;\ \ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = L$) (квадратурных формул типа Маркова) наилучшей является классическая формула трапеций, причём в обоих случаях точные оценки погрешности на указанных классах функций и кривых совпадают.

Основные результаты опубликованы в 30 работах, из которых 20 – в изданиях, рекомендованных ВАК Российской Федерации. Диссертация является законченной научно-квалификационной работой и удовлетворяет требованиям пункта 9 «Положения о порядке присуждения учёных степеней». В диссертации решены важные научные проблемы: найдены точные неравенства типа Джексона — Стечкина, связывающие величины наилучшего полиномиального приближения функций с обобщённым модулем непрерывности m-го порядка, определяемым оператором Стеклова, и вычислены точные значения n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями обобщённых модулей непрерывности m-го порядка; найдено точное неравенство типа Джексона — Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье — Бесселя и специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка и вычислены точные значения n-поперечников некоторых классов функций; найдено точное неравенство типа Джексона — Стечкина, связывающее величины наилучшего приближения функций, суммируемых с квадратом, целыми функциями экспоненциального типа с усреднённым весом обобщённым модулем непрерывности m-го порядка производных функций; вычислены точные значения средних ν-поперечников некоторых классов функций, определяемых модулями непрерывности m-го порядка в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$; найдены оптимальные квадратурные формулы в смысле С.М.Никольского приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности первого порядка; найдены оптимальные квадратурные формулы в смысле С.М.Никольского приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций, у которых норма первого и второго градиентов в пространстве L_p, $1 \leq p \leq \infty$ ограничена. В совокупности, полученные К.Тухлиевым результаты можно квалифицировать как достаточно важные научные достижения в области теории приближения функций.

Оценивая работу в целом, я считаю, что создано новое значительное направление в теории приближения, а разработанные при этом методы исследования позволили решить ряд давно стоящих задач. Представленная диссертация является самостоятельно выполненной работой. Научные результаты диссертации, выносимые автором на защиту, являются новыми, обоснованы в виде строгих математических доказательств. Диссертация удовлетворяет требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, и заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный консультант,
академик АН Республики Таджикистан,
доктор физ.-мат. наук, профессор
(специальность 01.01.01 — Вещественный,
комплексный и функциональный анализ) М.Ш.Шабозов

Место работы: 734063, г. Душанбе,
ул. Айни, 299/4, Институт математики
им. А.Джураева АН Республики Таджикистан.
Тел.: (+992) 93-500-86-52.
E-mail: shabozov@mail.ru

15.03.2017

Подпись М.Ш. Шабозова удостоверяю.
Ученый секретарь Института математики
им. А.Джураева АН Республики Таджикистан,
кандидат физ.-мат. наук, доцент И. Шокамолов