ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Зарипова Сухроба Бобокуловича «Двухмерные симметричные интегральные уравнения типа Вольтерра с сингулярными и серхсингулярными линиями», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01- Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Теория интегральных уравнений типа Вольтерра является одной из наиболее бурно развивающихся ветвей математического анализа. К рассмотрению таких интегральных уравнений типа Вольтерра приводят многие задачи прикладного характера. Данный тип уравнений имеют приложения в теоритической физике, механике, теории упругости, гидродинамики, теория поля и других разделах математической физики.

Среди интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода особое место занимают интегральные уравнения с нижними и верхними переменными пределами вида

$$\varphi(s) - \lambda \int_{-s}^{s} K(s,t)\varphi(t)dt = f(s), \qquad (1)$$

где $f(s)$ – определена и непрерывна при $-b \le s \le +b$, ядро $K(s,t)$ определено в прямоугольнике $R = \{-b \le s \le +b,\ -b \le t \le +b\}$.

В работах Л.Г. Михайлова изучены системы интегральных уравнений с однородными ядрами -1 степени. Проблеме изучения одномерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши вида

$$A(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} \frac{K(t,\tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau = f(t),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, Г – некоторый замкнутый или разомкнутый контур в комплексной плоскости Z, $A(t),\ K(x,t),\ f(t)$ - заданные функции, $\varphi(t)$ - искомая функция, посвящены монографии Ф.Д. Гахова, Н.И. Мусхелишвили.

Из теории интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода известно, что когда в интегральном уравнении второго рода ядро является непрерывной функцией или принадлежит пространству Гильберта, тогда такое интегральное уравнение имеет единственное решение. В монографиях Н.Раджабова., Л.Раджабовой изучены одномерные, двухмерные и в некоторых случаях многомерные интегральные уравнения типа Вольтерра второго рода с фиксированными граничным и внутренними сингулярными точками, линиями или областями. В данных работах доказано, что такие уравнения в некоторых случаях могут иметь ненулевые решения, например двухмерные интегральные уравнения с фиксированными граничными и внутренними сингулярными линиями могут содержать произвольные функции одного переменного, следовательно двухмерные интегральные уравнения имеют бесконечное число линейно-независимых решений. Выделяются случай, когда рассматриваемые интегральные уравнения имеют единственное решение. Полученные интегральные представления решений применяется для выяснения корректных подстановок краевых задач и их исследования.

В связи, с выше названным, исследованием двухмерных симметричных интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярными и сверхсингулярными линиями является важным и актуальным.

Диссертационная работа Зарипова Сухроба Бобокуловича посвящена исследованию двухмерных симметричных интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярными и сверхсингулярными линиями.

Приводим основной анализ содержания данной диссертационной работы.

Диссертация С.Б.Зарипова состоит из введения, двух глав, заключения, а также списка использованной литературы, в котором включены 80 наименований и занимает 117 страниц компьютерного набора.

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы, уточняется объект и цель диссертационной работы. Описываются применяемые методы и указываются теоретическая и практическая ценность работы.

Первая глава диссертации посвящена изучению двухмерного интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода, симметричного по одному из переменных с фиксированной внутренней линией и одной фиксированной граничной сингулярной или сверхсингулярной линией.

Через D_0 обозначим прямоугольник $D_0 = \{(x,y){:} -a < x < a, o < y < b\}$. Соответственно обозначим $D_0{}^- = \{-a < x < \mathrm{o}, o < y < b\}, D_0{}^+ = \{\mathrm{o} < x < a, o < y < b\}, \Gamma_\mathrm{o} = \{-a < x < a, y = 0\}$, $\Gamma_1 = \{x = 0, 0 < y < b\}$. В области $D = D_0 \backslash \Gamma_1$ рассматривается интегральное уравнение вида:

$$\varphi(x,y)+\int_{-x}^{x}\frac{A(t)\varphi(t,y)}{|t|^{\alpha}}dt+\int_{0}^{y}\frac{B(s)\varphi(x,s)}{s^{\beta}}ds+\int_{-x}^{x}\frac{dt}{|t|^{\alpha}}\int_{0}^{y}\frac{C(t,s)\varphi(t,s)}{s^{\beta}}ds$$
$$=f(x,y) \qquad (2)$$

где A(x), B(y), C(x,y) и $f(x,y)$ – заданные функции соответственно на Γ_o, Γ_1 и $\overline{D}_0$, $\varphi(x,y)$ - искомая функция. Причём функция A(x) в точке $x=0$ может иметь разрыв первого рода, $\alpha\geq 1, \beta\geq 1$.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию двухмерного интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода с симметричными переменными пределами по обеим переменным и внутренними сингулярными и сверхсингулярными линиями.

В дальнейшем обозначим $D_1=\{(x,y):-a<x<a,-b<y<b\}$. Соответственно обозначим ${D_1}^{+,+}=\{o<x<a,o<y<b\}, {D_1}^{-,-}=\{-a<x<0,-b<y<0\}, {D_1}^{+,-}=\{\ 0<x<a,-b<y<0\}$, ${D_1}^{-,+}=\{-a<x<0,0<y<b\}$, $\Gamma_1=\{-a<x<a,y=0\}$, $\Gamma_2=\{x=0,-b<y<b\}$.

В области D=$D_1\backslash\Gamma_1\cup\Gamma_2$ рассмотрим двухмерное интегральное уравнения типа Вольтерра вида:

$$\varphi(x,y)+\int_{-x}^{x}\frac{A(t)\varphi(t,y)}{|t|^{\alpha}}dt+\int_{-y}^{y}\frac{B(s)\varphi(x,s)}{|s|^{\beta}}ds+\int_{-x}^{x}\frac{dt}{|t|^{\alpha}}\int_{-y}^{y}\frac{C(t,s)\varphi(t,s)}{|s|^{\beta}}ds$$
$$=\ f(x,y), \qquad (3)$$

где A(x), B(y) и C(x,y) – заданные функции соответственно на Γ_1,Γ_2 и $\overline{D}_1$, $f(x,y)$ - заданная функция в D, $\varphi(x,y)$ - искомая функция. Причём функции A(x), B(y) соответственно в точках $x=0,\ y=0$ могут иметь разрыв первого рода, $\alpha\geq 1,\beta\geq 1$.

В первом параграфе первой главы в области $D=D_0\backslash\Gamma_1$ рассматривается двухмерное интегральное уравнение типа Вольтерра (2) при $\alpha=1,\beta=1$ вида:

$$\varphi(x,y)+\int_{-x}^{x}\frac{A(t)\varphi(t,y)}{|t|}dt$$
$$+\int_{0}^{y}\frac{B(s)\varphi(x,s)}{s}ds+\int_{-x}^{x}\frac{dt}{|t|}\int_{0}^{y}\frac{C(t,s)\varphi(t,s)}{s}ds=f(x,y), \qquad (4)$$

в случае, когда функции присутствующие в ядрах между собой связаны равенством C(x,y)=A(x)B(y).

Решение интегрального уравнения (4) будем искать в классе функций $\varphi(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{D})$, $\varphi(0,0) = 0$ с асимптотическим поведением:

$\varphi(x,y) = \mathrm{o}[|x|^{\varepsilon} y^{\varepsilon}]$, $\quad \varepsilon > 0 \quad$ при $\quad (x,y) \to (0,0)$.

Во втором параграфе первой главы изучается немодельное двухмерное симметричное интегральное уравнение с сингулярными линиями вида:

$$\varphi(x,y) + \int_{-x}^{x} \frac{K_1(x,y,t)}{|t|} \varphi(t,y)dt + \int_{0}^{y} \frac{K_2(x,y,s)}{s} \varphi(x,s)ds \ +$$

$$+ \int_{-x}^{x} \frac{dt}{|t|} \int_{0}^{y} \frac{K_3(x,y,t,s)}{s} \varphi(t,s)ds = f(x,y), \tag{5}$$

где $K_1(x,y,t)$, $K_2(x,y,s)$, $K_3(x,y,t,s)$, $f(x,y)$ - заданные непрерывные функции, причем $K_1(0,0,t) \neq 0$, $K_2(0,0,s) \neq 0$, $K_3(0,0,t,s) \neq 0$ (в частности $K_1(0,0,0) \neq 0, K_2(0,0,0) \neq 0$, $K_3(0,0,0,0) \neq 0$) в области D. Решение интегрального уравнения (5) будем искать в классе функций $\varphi(x,y) \in C(\overline{D})$, $\varphi(0,0) = 0$ с асимптотическим поведением:

$\varphi(x,y) = \mathrm{o}[|x|^{\rho} y^{\varepsilon}]$, $\quad \rho > 0,\ \varepsilon > 0 \quad$ при $\quad (x,y) \to (0,0)$.

В третьем и четвертом параграфе первой главы на основе полученных интегральных представлений для модельного и немодельного симметричного интегрального уравнения с сингулярными линиями (2) и (5) ставятся и исследуются граничные задачи типа Коши.

Задача $\boldsymbol{R_1}$. Требуется найти решение интегрального уравнения (2) из класса $C(\overline{D_0})$ при B(0)<0, E(0)<0, $\alpha = 1, \beta = 1$ по граничным условиям:

$$\begin{cases} \left[y^{B(0)}\varphi(x,y)\right]_{y=+0} = D_1^+(x), & (x,y) \in {D_0}^{+,+}, \\ \left[y^{B(0)}\varphi(-x,y)\right]_{y=-0} = D_2^+(x), & (x,y) \in {D_0}^{-,+}, \\ \left[|x|^{E(0)}\varphi(x,y)\right]_{x=0} = D_3^+(y), & (x,y) \in {D_0}^{+,+}, \end{cases}$$

где $D_1^+(x)$, $D_2^+(x)$, $D_3^+(y)$ - заданные функции точек Γ_0 и Γ_1.

В пятом параграфе первой главы изучено интегральное уравнение (2), когда коэффициенты уравнения связаны равенством C(x,y)=A(x)B(y) и $\alpha > 1, \beta > 1$.

В случае, когда B(0)<0, E(0)<0, ($E(0) = A(+0) - A(-0)$), для уравнения (2) имеет место соответствующее утверждение.

В шестом параграфе первой главы изучается немодельное двухмерное симметричное интегральное уравнение со сверхсингулярными линиями вида:

$$\varphi(x,y) + \int_{-x}^{x} \frac{K_1(x,y,t)}{|t|^\alpha} \varphi(t,y)dt + \int_{0}^{y} \frac{K_2(x,y,s)}{s^\beta} \varphi(x,s)ds + \int_{-x}^{x} \frac{dt}{|t|^\alpha} \cdot$$

$$\cdot \int_{0}^{y} \frac{K_3(x,y,t,s)}{s^\beta} \varphi(t,s)ds = f(x,y), \tag{6}$$

где $K_1(x,y,t)$, $K_2(x,y,s)$, $K_3(x,y,t,s)$, $f(x,y)$ - заданные непрерывные функции, причем $K_1(0,0,t) \neq 0$, $K_2(0,0,s) \neq 0$, $K_3(0,0,t,s) \neq 0$ в области D, $\alpha > 1$, $\beta > 1$.

Решение интегрального уравнения (6) будем искать в классе функций $\varphi(x,y) \in C(\overline{D})$, $\varphi(0,0) = 0$ с асимптотическим поведением

$$\varphi(x,y) = o[|x|^{\gamma_{17}} y^{\gamma_{18}}], \quad \gamma_{17} > \alpha - 1, \gamma_{18} > \beta - 1 \quad \text{при} \quad (x,y) \to (0,0).$$

В седьмом и восьмом параграфе первой главы на основе полученных интегральных представлений для модельного симметричного интегрального уравнения со сверхсингулярными линиями (2) и немодельного симметричного интегрального уравнения со сверхсингулярными линиями (6) ставятся и исследуются граничные задачи типа Коши.

Вторая глава посвящена исследованию двухмерных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода с двумя симметричными переменными пределами, когда ядро интегрального уравнения имеет две внутренние сингулярные и сверхсингулярные линии.

В **первом параграфе второй главы** изучено интегральное уравнение (3), когда коэффициенты уравнения связаны равенством C(x,y)=A(x)B(y), $\alpha = 1, \beta = 1$.

В случае, когда N(0)>0,E(0)<0, (N(0)=B(0)-B(-0), $E(0) = A(+0) - A(-0)$), для уравнения (3) получены соответствующие утверждения.

Во **втором параграфе второй главы** изучено интегральное уравнение (3), когда коэффициенты уравнения связаны равенством C(x,y)=A(x)B(y) при $\alpha > 1, \beta > 1$.

В случае, когда $N(0)$>0, $E(0)$>0, $(E(0) = A(+0) - A(-0))$, для уравнения (3) также получены соответствующие утверждения.

В **третьем и четвертом параграфе второй главы** на основе полученных интегральных представлений для модельного симметричного интегрального уравнения с сингулярными и сверхсингулярными линиями (3) ставятся и исследуются граничные задачи типа Коши.

В работе имеются отдельные недостатки технического характера, допущены некоторые грамматические и стилистические ошибки.

Например, имеются следующие замечания по оформлению и содержанию диссертации:

1. В диссертации на стр. 11 в тринадцатой строке, вместо выражения $c_1(x) = \mathrm{o}(\, x^{\epsilon})$ написана $c_1(x) = 0(x^{\epsilon})$ и на стр. 102 вместо $f_5(x) = \mathrm{o}[|x|^{\,\mu_{29}}]$, написано $f_5(x) = 0[|x|^{\,\mu_{29}}]$.
2. В диссертации на стр. 102 после выражения $(x, y) \in {D_0}^{+,+}, (x, y) \in {D_0}^{-,+}, (x, y) \in {D_0}^{+,+}$ пропущены запятые.

Высказанные замечания не снижают научных достоинств диссертации и не могут существенно повлиять на её общую оценку.

Полученные диссертантом результаты, основные положения исследования и выводы прошли апробацию на десяти международных научно-практических конференциях и на семинаре кафедры математического анализа и теории функции “ Комплексный анализ и его приложения” (руководитель академик АН РТ Н.Р.Раджабов) (2013-2018). Основное содержание работы изложено в семнадцати научных статьях автора, из них семи опубликованы в рецензируемых журналах из перечня рекомендованных ВАК РТ и РФ.

Автореферат правильно отражает основное содержание диссертационной работы.

В целом, считаем, что диссертационная работа «**Двухмерные симметричные интегральные уравнения типа Вольтерра с сингулярными и сверхсингулярными линиями**», представленная на соискание ученой степени кандидата наук, удовлетворяет всем требованиям

ВАК РТ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор Зарипов Сухроб Бобокулович заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01- Вещественный ,комплексный и функциональный анализ .

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа
Курган - Тюбинского государственного
университета имени Н. Хусрава Ф.М. Шамсудинов

14.08.2018

Адрес: 735140, Республика Таджикистан, г. Курган-Тюбе, ул. Айни, 102, кв. 38.
Тел.: моб. (+992) 918-66-70-65; e-mail: faizullo100@yahoo.com

Подпись Ф.М. Шамсудинова заверяю:
Начальник ОК Курган-Тюбинского
государственного университета
им. Носира Хусрава А.Амиршоев