

На правах рукописи

НОРМАТОВ ЗАФАР САФАРМУРДОВИЧ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА В  
КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ МЕТОДОМ ИСКУССТВЕННОЙ  
ГИПЕРБОЛИЗАЦИИ**

Специальность 01.04.07-физика конденсированного состояния

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Душанбе - 2018

Работа выполнена на кафедре вычислительных машин, систем и сетей Таджикского национального университета.

- Научный руководитель:** **Джураев Хайрулло Шарофович**- кандидат физико-математических наук, доцент
- Научный консультант:** **Комилов Косим**- доктор физико-математических наук, доцент
- Официальные оппоненты:** **Тимофеев Николай Александрович**-доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой оптики Санкт-Петербургского государственного университета;  
**Юсупов Шабони Мирзоевич**-доктор технических наук, профессор, директор Научно-исследовательского Института Промышленности Таджикистана.
- Ведущая организация:** Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими

Защита состоится « **20** » **марта** **2018** года в **10:00** часов на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.188.02 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Таджикском национальном университете по адресу: 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17, факс (992-372) 21-77-11, Зал заседаний Ученого совета ТНУ.

Отзывы направлять по адресу: 734025, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17, ТНУ, диссертационный совет ДМ 999.188.02, E-mail: [tgnu@mail.tj](mailto:tgnu@mail.tj).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте Таджикского национального университета <http://www.tnu.tj> (734025, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17).

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

Ученый секретарь объединенного  
диссертационного совета ДМ 999.188.02,  
кандидат физ.-мат. наук, СИС

Табаров С.Х.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Процессы теплопроводности и переноса массы являются неотъемлемой частью работы многих технических средств и оборудования самого различного назначения, в том числе энергетической, атомной, химической, строительной промышленности, космонавтики и многих других отраслей народного хозяйства. Решение многих задач связанных с эффективностью и надежностью работы современных тепловых двигателей и космической техники, особенно по части организации их системы охлаждения, существенным образом зависят от успехов теории тепло- и массопереноса. При этом важно знать физические механизмы, лежащие в его основе и обеспечивающие существование явления переноса, его устойчивость, неустойчивость и другие характеристики, которые непосредственно отражаются на эффективности, долговечности, надежности, физической и экологической безопасности использования технических средств и оборудования. В связи со сказанным моделирование и исследования линейных и нелинейных процессов тепло- и массопереноса в конденсированных средах являются актуальной задачей при создании приборов на основе нанотехнологии.

Для математического и численного моделирования очень важной является проблема проверки правильности построения моделей, которая может быть решена введением некоторых параметров (регуляризации, релаксации теплового потока) как пробных математических параметров. Исследования зависимости процессов тепло- и массопереноса от пробных математических параметров требует введения новых математических методов, в том числе и метод искусственном гиперболизации. Существенным моментом этого метода является его универсальность, простота реализации при высокой точности решения.

**Цель** диссертационной работы заключается в исследовании процессов тепло- и массопереноса в различных конденсированных средах методом искусственной гиперболизации.

Для достижения поставленной цели в работе решается следующий комплекс задач:

-построение физической и математической модели, описывающей распределение температуры и массы в средах с течением времени;

-исследование распространения температуры в неограниченной и ограниченной средах с течением времени;

-исследование распространения температуры в неограниченной среде при наличии внешнего источника;

-математическое моделирование лазерного нагрева твердых тел на основе гиперболического уравнения теплопроводности;

-исследование потока вещества в сосудах плоской, цилиндрической и сферической формы;

-определение характерного времени релаксации теплового и концентрационного потока.

**Научная новизна** работы состоит в том, что впервые:

-**разработан** метод приближенного аналитического решения прямой и обратной задач тепло- и массопереноса путём использования интегрального преобразования, разделения переменных и разложения в ряды с помощью методов регуляризации;

-**предложена** новая математическая модель, описывающая восстановление начальных распределений температуры и концентрации, то есть метод искусственной гиперболизации;

-**получено** приближенное аналитическое решение уравнения гиперболического типа, описывающего распределение температуры и перенос массы в средах с различной геометрической формой;

-**разработана** математическая модель лазерного нагрева твердых тел на основе метода искусственной гиперболизации;

-**разработан** метод определения характерного времени релаксации теплового и концентрационного потока;

**-установлена** непрерывная зависимость распределения температуры и концентрации от их начального распределения.

**Теоретическая и практическая значимость** работы заключается в том, что приближённые аналитические результаты диссертации могут быть использованы при разработке компьютерных моделей тепло- и массопереноса и в других научно-прикладных задачах, а также в образовательном процессе, при разработке принципиально новых, более эффективных технологий создания теплотехнических сооружений.

Представленная работа является обобщением теоретических исследований, выполненных автором на кафедре «Вычислительные машины, системы и сети» Таджикского национального университета. Исследования проводились согласно планам госбюджетных тематик ТНУ, зарегистрированных под № 0107ТД648 (01.01.2006-31.12.2010) «Аналитическое исследование и численное решение некоторых задач математической физики и информационной технологии» и № 0110РК15084(а) (01.01.2011-31.12.2015) «Исследование физических основ информационных процессов и методов регуляризации некоторых задач математической физики», а также проектов Президентского фонда фундаментальных исследований за 2008-2010 гг. за № 0108ТД745 «Метод устойчивых решений некоторых задач математической физики».

**Методы исследования.** Основные результаты диссертации получены с применением методов теоретической и математической физики, теории дифференциальных уравнений, в частности, метода искусственной гиперболизации.

**Основные положения,** выносимые на защиту:

-метод решения прямой и обратной задач тепло- и массопереноса-метод искусственной гиперболизации является более общим методом по сравнению с другими методами;

-решение дифференциального уравнения второго порядка по времени для задач прямого и обратного тепло- и массопереноса является устойчивым по отношению к возмущению исходных данных;

-нелинейное уменьшение температуры тела в ограниченных и неограниченных конденсированных средах по мере возрастания его линейных размеров;

-линейная зависимость температуры тела от его длины при наличии внешнего источника (медленное падение с ростом длины);

-экстремальная временная зависимость температуры тела в условиях лазерного нагрева;

-нелинейное уменьшение температуры по мере проникновения тепла вглубь тела и его переход к постоянному значению в пределе;

- нелинейный рост плотности потока массы во времени в сосуде плоской геометрической формы с заданным распределением концентрации вещества во всех внутренних точках среды;

-в сосуде цилиндрической геометрической формы при заданной концентрации вещества во внутренней и внешней поверхности цилиндра, плотность потока вещества на начальной стадии процесса остается почти неизменной, а в последующие моменты времени имеет тенденцию к медленному уменьшению;

-слабый нелинейный рост плотности потока массы со временем в сосуде сферической формы при известных значениях концентрации вещества во внутренней и внешней поверхностях сферы.

**Достоверность** полученных результатов подтверждается использованием математических моделей, адекватных реальным физическим процессам, применением обоснованных методов построения приближенных аналитических решений прямой и обратной задач тепло- и массопереноса, которые непрерывно зависят от начальной концентрации вещества, плотности потока вещества, распространения температуры.

**Апробация работы.** Основные результаты работы доложены на:

Международной конференции «Современные проблемы физики конденсированных сред и астрофизики» (Душанбе, 21-22 мая 2010г.); Международной конференции «Современные вопросы молекулярной спектроскопии конденсированных сред» (Душанбе, 11-12 ноября 2011г.); Международной конференции, посвященной 60-летию ТНУ (Душанбе, 22-24 октября 2008г.); научно-теоретической конференции профессорского -преподавательского состава ТНУ (ежегодно с 2008-2017 гг.); республиканской научно-практической конференции «Перспективы развития науки и образования в XXI веке» (Душанбе, 2010-2011 гг.); республиканской конференции по ядерно-физическим методам анализа состава биологических, геологических, химических и медицинских объектов (Душанбе, 19 октября 2014г.); республиканской конференции «Современные проблемы физики конденсированного состояния» (Душанбе, 24 октября 2015г.); Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 25-27 мая 2016 г.); Международной научной конференции «Современные проблемы математики и их приложения» (Душанбе, Куляб, 14-15 июня 2017); научных семинарах физического факультета и кафедры вычислительных машин, систем и сетей ТНУ.

**Публикации.** По результатам диссертационной работы опубликованы 20 научных трудов, из которых 7 статей в рецензируемых изданиях из Перечня ВАК Российской Федерации.

**Личный вклад автора.** Личное участие автора в работе, заключалось в постановке задачи исследований, в непосредственном проведении численных расчётов, обработке, анализе и интерпретации полученных результатов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, выводов и списка цитируемой литературы из 110 наименований. Общий объем 111 страниц, включая 99 страниц текста, который содержит 26 рисунков.

**Ключевые слова:** теплоперенос, массоперенос, поток вещества, температура, ограниченные и неограниченные среды, параметр регуляризации,

характерная время релаксации.

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи работы. Определена научная и практическая значимость проведённых исследований, указан личный вклад автора, приведены основные положения, выносимые на защиту, и дана информация об апробации основных результатов работы.

**В первой главе** приведен обзор методов решения прямой и обратной задач тепло- и массопереноса. Детально анализируются физические основы математического моделирования задачи тепло- и массопереноса. Рассматриваются проблемы, возникающие при исследовании распространения температуры и потока массы в конденсированных средах. Кратко обсуждаются различные математические методы, применяемые при решении прямой и обратной задач тепло- и массопереноса и, в особенности, преимущества метода искусственной гиперболизации.

**Вторая глава** диссертации посвящена исследованию теплопроводности тел методом искусственной гиперболизации. Объектом исследования являются процессы прямого и обратного распространения тепла в неограниченных и ограниченных средах.

Ранее другими авторами данная задача была решена с использованием следующего уравнения теплопроводности [1, 2]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad (1)$$

где  $T$  – температура (К–Кельвин или  $^{\circ}\text{C}$ –Цельсия),  $\beta = \lambda / (c_p \cdot \rho)$  – коэффициент температуропроводности ( $\text{м}^2/\text{с}$ ),  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности ( $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ),  $\rho$  – плотность среды ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ),  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении ( $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ).

Решение уравнения (1) в предположении  $T = T_0(r, 0)$  было получено в работе [1], которое имеет вид:

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\beta \lambda_k^2 t) \sin(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \exp(-\beta \lambda_k^2 t) \cos(\lambda_k x). \quad (2)$$



Проведенные численные расчеты с использованием функции (2) показали, что решение уравнения (1) при замене  $t \rightarrow -t$  является неустойчивым.

Поскольку процесс распространения тепла в конденсированных средах имеет волновой характер, в данной работе, решены прямая и обратная задачи теплопроводности с применением метода искусственной гиперболизации. Смысл этого метода заключается в том, что в левую часть уравнения (1) добавляется слагаемое следующего вида:  $\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$ , где  $\alpha$  – характерное время процесса. Тогда уравнение (1) принимает следующий вид:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Уравнение (3), в отличие от уравнения (1), даёт конечную скорость распространения возмущений тепла в среде и позволяет решить обратную задачу теплопроводности, то есть его решение является устойчивым по отношению к исходным данным.

**В разделе 2.1** рассмотрен процесс распространения температуры в неограниченной конденсированной среде при заданных начальных условиях:

$$T = T_0(x, 0). \quad (4)$$

В этом случае решение уравнения (3) имеет вид

$$T_{\alpha N}(x, t) = \sum_{k=1}^N T_{0k} \exp(-\omega_k(\alpha)t) \left[ 1 + \alpha \frac{\omega_k(\alpha)}{\sqrt{1 - 4\alpha\lambda_k^2\beta}} \left( \exp\left(-\frac{\sqrt{1 - 4\alpha\lambda_k^2\beta}}{\alpha}t\right) - 1 \right) \right] \sin(\lambda_k x). \quad (5)$$

Для качественной интерпретации полученного результата с использованием выражения (5) проведен численный расчет зависимости температуры от изменения линейных размеров тела на примере алюминия.

Далее, для всестороннего анализа полученных результатов, используя выражение (5), проведён численный расчет зависимости распределения температуры вдоль длины ( $x$ ) образца на примере стержня изготовленного из алюминия ( $\alpha=0,0118$  с;  $\lambda = 228$  Вт/(м·К);  $c_p = 0,896$  Дж/(кг·К);  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>;  $\beta = \lambda/(c_p \cdot \rho)$  м<sup>2</sup>/с;  $T_0=293$  К [3].

Предположим, что в начальный момент времени температура равна нулю во всем пространстве за исключением начала координат ( $x=0$ ). Будем считать, что в начале координат температура 450 К. Задачей численного расчета является установление хода распределения температуры вдоль длины образца.

Результаты численных расчетов зависимости распределения температуры вдоль длины тела для различных значений времени  $t$  представлены на рисунке 1а.

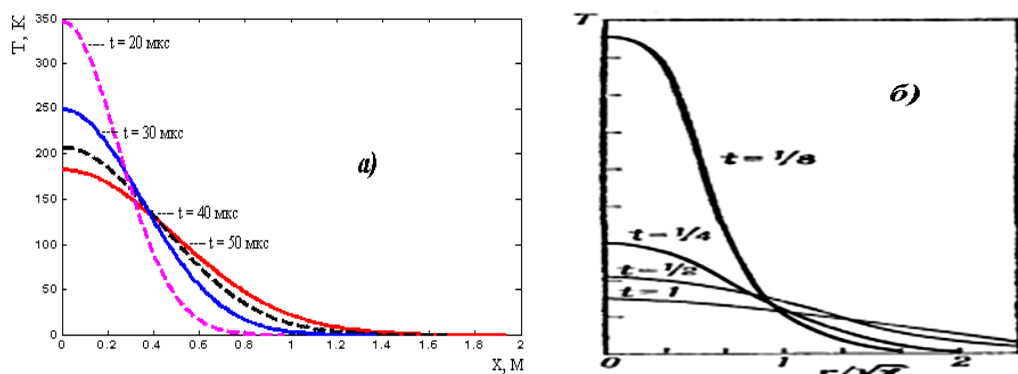


Рис.1. Зависимость распределения температуры вдоль длины образца при различных значениях времени: а) ( $t = 50$  мкс;  $40$  мкс;  $30$  мкс;  $20$  мкс); б) - результаты работы [2].

Из полученных результатов численного расчета следует, что в окрестности точки  $x=0$  в течение 50 мкс температура падает до 350 К. В следующее 40 мкс наблюдается дальнейшее падение температуры 250 К и т.д. К сожалению в работе [2] нет конкретной информации о начальной температуре в точке  $x=0$ . Поэтому проведение количественного сравнения наших результатов с результатами работы [2] невозможно.

**В разделе 2.2** исследован процесс распространения тепла в ограниченной среде. В этом случае начальное и граничное условия, соответственно, имеют вид:  $T = T_0(x, 0)$ ;  $T|_{x=0} = T_1(t)$ ,  $T|_{x=h} = T_2(t)$ .

Общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$T_{\alpha N}(x, t) = \sum_{n=1}^N T_{0n} \frac{\exp(\omega_n(\alpha)t)}{2\alpha\omega_n(\alpha) - \sqrt{1 + 4\alpha\beta\lambda_n^2}} \cdot \left( \alpha \left( 1 + \exp\left( \frac{2\alpha\omega_n(\alpha) - \sqrt{1 + 4\alpha\beta\lambda_n^2}}{\alpha} t \right) \right) - \frac{\omega_n(\alpha)}{\sqrt{1 + 4\alpha\beta\lambda_n^2}} \right) \sin(\lambda_n x) \quad (6)$$

где  $\omega(\alpha) = -\frac{2\beta\lambda^2}{1 + \sqrt{1 + 4\alpha\beta\lambda^2}}$ .

Для более детального анализа характера распространения тепла в ограниченной среде необходимо проведение численных расчётов. Для проведения численных расчётов используем выражение (6). В качестве примеров для проведения численных расчётов выбираем образцы [3], приготовленные из бронзы (75% Cu и 25% Sn;  $\alpha = 0,006$  с;  $\lambda = 25,9$  Вт/(м·К);  $c_p = 0,343$  Дж/(кг·К);  $\rho = 8660$  кг/м<sup>3</sup>) и дюралюминия (94-96% Al, 3-5% Cu, следы Mg;  $\alpha = 0,0217$  с;  $\lambda = 164,5$  Вт/(м·К);  $c_p = 0,883$  Дж/(кг·К);  $\rho = 2800$  кг/м<sup>3</sup>).

На рис. 2 и 3 представлены результаты численных расчетов зависимости температуры от изменения длины  $x$  образца при различных значениях времени распространения тепла. Из этих рисунков следует, что зависимость распределение температуры от изменения длины ограниченного тела ( $l$ )

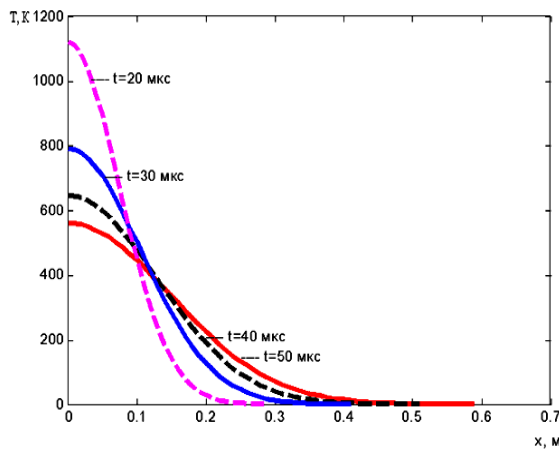


Рис.2. Изменение распределения температуры вдоль длины образца бронзы при различных значениях времени: 20, 30, 40, 50 мкс.

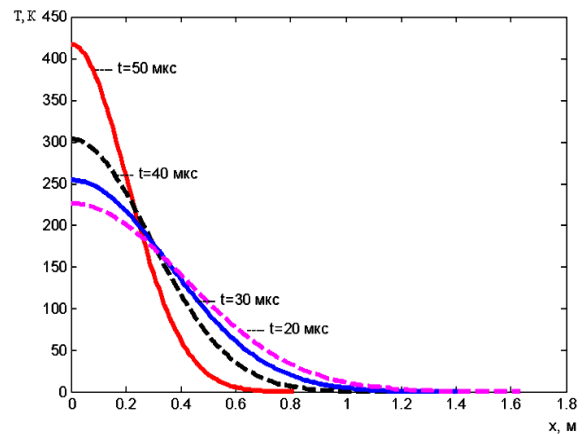


Рис.3. Изменение распределения температуры вдоль длины образца дюралюминия при различных значениях времени: 20, 30, 40, 50 мкс.

также качественно совпадает с результатами работы [2], то есть температуры нелинейно уменьшается с ростом длины тела.

Процесс теплопроводности, описываемый полученной нами формулой (6), обладает тем свойством, что влияние всякого теплового возмущения быстро распространяется на все пространство. Из формулы (6) и рис.2 и 3 видно, что тепло из точечного источника распространяется так, что уже в последующие моменты времени температура среды обращается в нуль асимптотически лишь на бесконечности.

**В разделе 2.3** рассмотрен процесс распространения тепла в неограниченной среде при наличии внешнего источника. В этом случае уравнение (3) можно записать в следующем виде:

$$\alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = Q(x,t), \quad (7)$$

где  $Q(x,t) = \frac{1}{\rho c_p} q(x,t)$ .

Решение уравнения (7) при заданном начальном условии  $T = T_0(x,0)$  имеет вид:

$$T_\alpha(x,t) = T_{I\alpha}(x,t) + \int_0^t \Omega_\alpha(x,t,\tau) d\tau = T_{I\alpha}(x,t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} Q(T(\xi,\tau)) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{1-4\alpha\beta\lambda_\xi^2}}{\alpha}(t-\tau)\right) \right] \frac{\exp(\omega_\xi(\alpha)(t-\tau)) \exp(-i\xi x) d\xi d\tau. \quad (8)$$

Для всестороннего анализа характера распространения теплового потока в среде при наличии постоянного внешнего источника  $Q = \frac{1}{\rho c_p} q_{max}$ , где

$q_{max} \cong 3.65 \cdot 10^8 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$  проведем численные расчёты, используя выражение (8).

Рассмотрим случай, когда нормально подается тепло на поверхность среды.

В качестве примера для проведения численных расчётов выбираем алюми-

ниевый сплав Al-Si (87% Al; 13% Si) ( $\alpha = 0,0118 \text{ с}$ ;  $\lambda = 163,9 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{°C}}$ ;

$c_p = 0,871 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{°C}}$ ;  $\rho = 2660 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ) и вольфрам ( $\alpha = 0,0250 \text{ с}$ ;  $\lambda = 162,8 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{°C}}$ ;

$c_p = 0.126 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ ;  $\rho = 19300 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  ( $293 \text{ K}$ ). Эти параметры взяты из справочника [3].

На рис.4 и 5 представлены результаты численных расчетов зависимости распределения температуры от времени образца при различных значениях толщины  $x$  слоя среде. Кривая  $x = 0$  показывает ход распределения температуры от времени на поверхности, а кривая  $x = 0.02$  мкм соответствует распределению температуры от времени на этой глубины и т.д. На рис.6 представлены результаты численных расчетов работы [4].

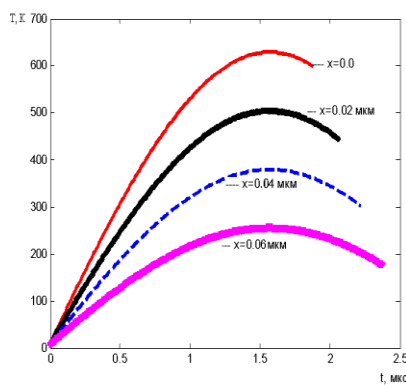


Рис. 4.

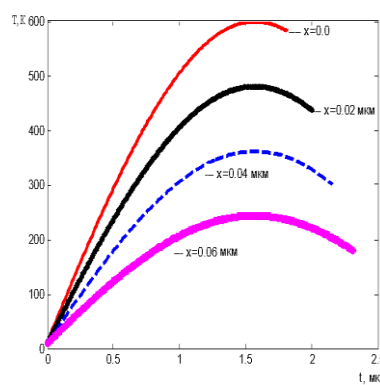


Рис. 5

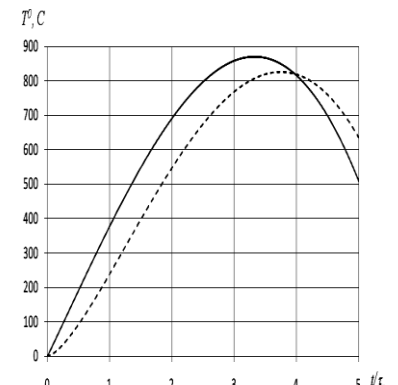


Рис. 6

Рис. 4. Изменение распределения температуры в алюминиевом сплаве от времени  $t(\text{мкс})$ .

Рис. 5. Изменение распределения температуры в вольфраме от времени  $t(\text{мкс})$ .

Рис. 6. Изменение температуры во времени  $t(\text{мкс})$ .

Из рисунков 4 и 5 следует, что ход зависимости распределения температуры по мере углубления в тело имеет нелинейный характер и, с увеличением глубины ( $x$ ), медленно уменьшается, что находится в качественном согласии с результатами работ [4, 5].

**В разделе 2.4** предложена математическая модель лазерного нагрева твердых тел на основе гиперболического уравнения теплопроводности. В этом случае общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$T_\alpha(x, t) = T_{1\alpha}(x, t) + T_{2\alpha}(x, t), \quad (9)$$

где

$$T_{1\alpha}(x, t) = \sum_{m=0}^N \cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi x\right) \exp(\omega_m(\alpha)t) \left[ \frac{\left( \sqrt{1-4\alpha\beta\left(\frac{\pi(2m+1)}{2}\right)^2} + \alpha\omega_m(\alpha) \right) \varphi_{1m} + \varphi_{2m}}{\sqrt{1-4\alpha\beta\left(\frac{\pi(2m+1)}{2}\right)^2} + (\alpha+1)\omega_m(\alpha)} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_m(\alpha)\varphi_{1m} - \varphi_{2m}}{\sqrt{1-4\alpha\beta\left(\frac{\pi(2m+1)}{2}\right)^2} + (\alpha+1)\omega_m(\alpha)} \exp\left(-\left(\sqrt{1-4\alpha\beta\left(\frac{\pi(2m+1)}{2}\right)^2} + (\alpha+1)\omega_m(\alpha)\right)t\right) \right];$$

$$T_{2\alpha}(x, t) = \frac{1}{\rho c_\rho} \sum_{m=0}^N \frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi x\right) \exp(\omega_m(\alpha)t)}{\sqrt{1-4\alpha\beta\left(\frac{\pi(2m+1)}{2}\right)^2} + (\alpha+1)\omega_m(\alpha)} \left[ \int_0^t \exp(-\omega_m(\alpha)\tau) q(x, \tau) d\tau - \right. \\ \left. - \exp\left(-\left(\sqrt{1-4\alpha\beta\left(\frac{\pi(2m+1)}{2}\right)^2} + (\alpha+1)\omega_m(\alpha)\right)t\right) \int_0^t \exp\left(\left(\sqrt{1-4\alpha\beta\left(\frac{\pi(2m+1)}{2}\right)^2} + (\alpha+1)\omega_m(\alpha)\right)\tau\right) q(x, \tau) d\tau \right];$$

$$\omega_m(\alpha) = -\frac{2\beta\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)^2}{1 \pm \sqrt{1-4\alpha\beta\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)^2}}; \quad \varphi_{1m} = \frac{4}{(L_2 - L_1)} \int_{L_1}^{L_2} \varphi_1(x) \cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi x\right) dx;$$

$$\varphi_{2m} = \frac{4}{(L_2 - L_1)} \int_{L_1}^{L_2} \varphi_2(x) \cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi x\right) dx; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Как следует из полученного решения характер зависимости распределения температуры от глубины ( $x$ ) проникновения тепла в тело и от длительности ( $t$ ) действия лазера имеет сложный вид. Поэтому для наглядной интерпретации характера зависимости температуры тела от толщины проникновения тепла и длительности действия лазера необходимо проведение численных расчетов. Опять рассмотрим случай нормального падения лазерного луча на поверхность среды.

Используя выражение (9) проведем численный расчет. В качестве примера для численных расчётов выбираем образец стали марки 40X, параметр

регуляризации (характерное время релаксации)  $\alpha = 2.1977 \cdot 10^{-8}$ ; коэффициент теплопроводности которого  $\lambda = 40,62 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ; плотность  $\rho = 7,918 \cdot 10^4 \text{ кг}/\text{м}^3$ ; теплоёмкость  $c_p = 364.726 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ; коэффициент температуропроводности

$$\beta = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \left( \text{м}^2/\text{с} \right).$$

На рис. 7(а) представлены результаты численных расчетов зависимости температуры от времени  $t$  (мкс) действия лазера при различных значениях толщины слоя ( $x$ ) проникновения тепла в среде. Расчет был проведен при  $q_{\text{max}} = 3,7 \cdot 10^8 \text{ Вт}/\text{м}^2$ . На рис. 7(б) приведены результаты численных расчетов работы [6].

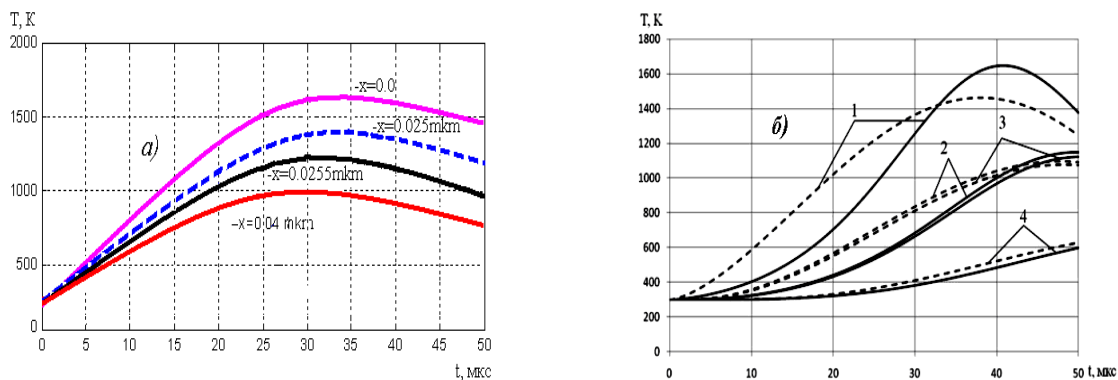


Рис.7. Изменение распределения температуры в стали марки 40X от времени действия лазера при различных значениях толщины проникновения тепла: 1-при  $x = 0$ ; 2-при  $x = 0,025 \text{ мкм}$ ; 3-при  $x = 0,0255 \text{ мкм}$ ; 4-при  $x = 0,04 \text{ мкм}$ . а) результаты численного расчета по формуле (9); б) результаты работы [6].

Из сравнения этих рисунков следует, что результаты расчёта качественно совпадают с результатами работы [6].

На рис.8(а) представлены результаты численных расчетов зависимости распределения температуры от толщины слоя ( $x$ ) проникновения тепла в теле при различных значениях времени действия лазерного луча. На рис.8(б) приведен результат численных расчетов работы [6].

Из сравнения этих рисунков следует, что результаты численного расчета по формуле (9) и результаты работы [6] качественно совпадают.

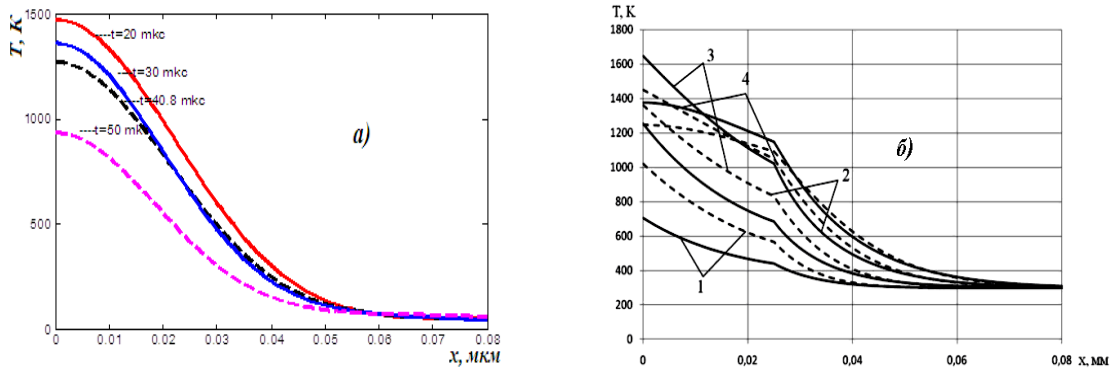


Рис.8. Изменение распределения температуры в стали марки 40X от толщины слоя  $x$  тела при различных значениях времени: 1 –при  $t=20$  мкс; 2 – при  $t=30$  мкс; 3 –при  $t=40,8$  мкс; 4 –при  $t=50$  мкс. а) результаты численного расчета по формулы (9); б) результаты работы [6].

**В третьей главе** рассмотрен процесс переноса массы в средах с различными геометрическими формами. В общем случае согласно методу искусственной гиперболизации, уравнение массопереноса принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( D(r) \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} \right) = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \quad (10)$$

где  $u_\alpha = u_\alpha(r, t)$  – функция, характеризующая изменение свойства вещества;  $D(r)$ – коэффициент диффузии.

**В разделе 3.2** исследован процесс переноса массы в сосуде плоской геометрической формы. При следующих заданных граничных условиях

$$u(x, t)|_{x=h} = f(t), \quad -D \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=h} = g(t),$$

решение уравнения (9) принимает вид

$$u_\alpha(x, t) = f(t) + \sum_{k=1}^N \frac{(h-x)^{2k}}{D^k (2k)!} \sum_{n=1}^k C_n^k \alpha^{k-n} \frac{d^{2(k-n)} f(t)}{dt^n} - (h-x)g(t) + \sum_{k=1}^N \frac{(h-x)^{2k+1}}{D^k (2k+1)!} \sum_{n=0}^k C_n^k \alpha^{k-n} \frac{d^{2(k-n)} g(t)}{dt^{2(k-n)}}. \quad (11)$$

Для анализа зависимости плотности потока вещества от времени течения потока на основе выражения (11) проведен численный расчет на примере потока воды, где: плотность воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ , удельная теплоемкость



$c_p = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ , коэффициент диффузии  $D = 0.276 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ , характерное время процесса  $\alpha = 5 \cdot 10^{-11} \text{ с}$ .

Результаты численных расчетов для различных значений  $x$  представлены на рис. 9(а), а на рис.9(б) приведены результаты численного расчета работы [7].

Как видно из рис. 9(а), с возрастанием времени течения плотность потока воды нелинейно возрастает, что находится в удовлетворительном согласии с результатами работы [7].

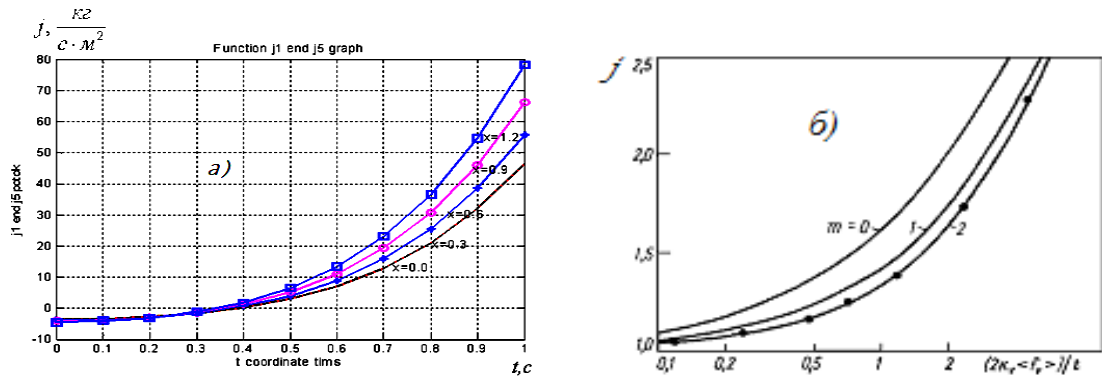


Рис. 9. а)- результаты численных расчетов зависимости плотности потока воды от времени течения потока; б)- результаты работы [7].

**В разделе 3.3** рассмотрен перенос массы в сосуде цилиндрической формы при выполнении следующих граничных условий:

$$u(R, t)|_{R=E} = f(t), \quad -D \frac{\partial u}{\partial R} \Big|_{R=E} = g(t).$$

В этом случае решение уравнения (10) имеет вид

$$u_\alpha(R, t) = f(t) + \sum_{k=1}^N \frac{(E-R)^{2k}}{D^k (2k)!} \sum_{n=1}^k C_n^k \alpha^{k-n} \frac{d^{2(k-n)} f(t)}{dt^{2(k-n)}} - \frac{1}{D} \left( (E-R)g(t) + \sum_{k=1}^N \frac{(E-R)^{2k+1}}{D^k (2k+1)!} \sum_{n=0}^k C_n^k \alpha^{k-n} \frac{d^{2(k-n)} g(t)}{dt^{2(k-n)}} \right). \quad (12)$$

Для определения зависимости потока вещества в сосуде цилиндрической формы от времени течения потока на основе выражения (12) проведен численный расчет на примере потока воды  $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $c_p = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ,  $D = 0.276 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ , характерное время процесса  $\alpha = 5 \cdot 10^{-11} \text{ с}$ .

Результаты численных расчетов зависимостей потока воды от времени для различных значений  $R$  представлены на рис. 10 (а), а на рис. 10 (б) приведены для сравнения результаты работы [7].

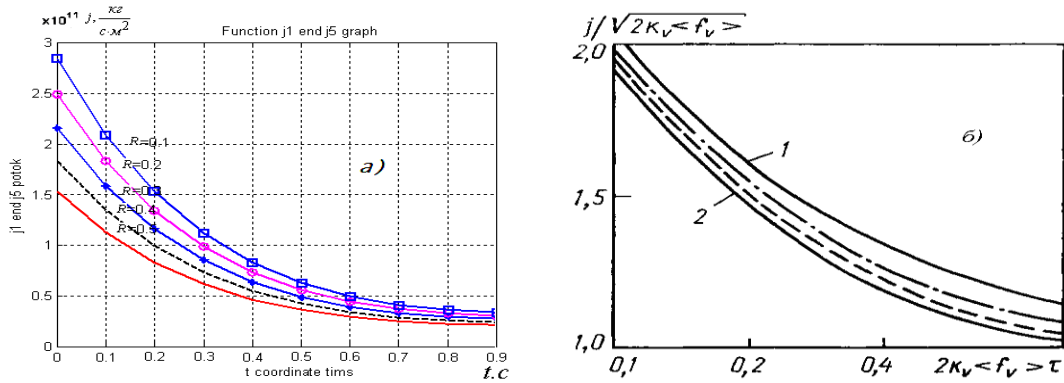


Рис.10. Зависимость плотности потока воды в сосуде цилиндрической формы от времени течения потока: а)- результаты численных расчетов по формуле (12); б)- результаты работы [7].

Как видно из рис. 10 (а), на начальной стадии процесса плотность потока остается неизменной, а в последующие моменты времени характер изменения плотности потока имеет тенденцию к медленному спаданию, что находится в качественном соответствии с результатами работы [7].

**В разделе 3.4** рассмотрен перенос массы вещества в сосуде сферической формы при наличии следующих граничных условий:

$$u(R, t) \Big|_{r=E} = f(t), \quad -D \frac{\partial u}{\partial R} \Big|_{r=E} = g(t).$$

В этом случае решение уравнения (9) имеет вид

$$u_\alpha(r, t) = f(t) + \sum_{k=1}^N \frac{(E-r)^{2k}}{(2k)!} \sum_{n=1}^k C_n^k \alpha^{k-n} \frac{d^n f(t)}{dt^n} - (E-r)g(t) - \frac{1}{D} \sum_{k=1}^N \frac{(E-r)^{2k+1}}{(2k+1)!} \sum_{n=0}^k C_n^k \alpha^{k-n} \frac{d^n g(t)}{dt^n}. \quad (13)$$

Для изучения зависимости плотности потока массы вещества от времени течения потока в сосуде сферической формы на основе выражения (13) проведен численный расчет на примере потока воды:  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_p = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$ ,  $D = 0.276 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\alpha = 5 \cdot 10^{-11} \text{ с}$ .

Результаты численных расчетов зависимости плотности потока вещества от времени для различных значений  $r$  представлены на рис.11(а), а на рис.11(б) приведены результаты работы [8].

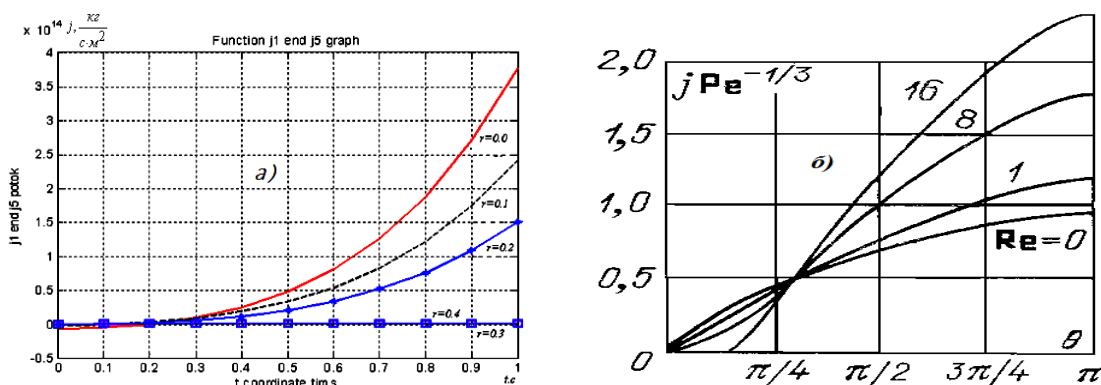


Рис.11. Зависимость плотности потока воды в сосуде сферической формы от времени течения потока: а)- результаты численных расчетов по формуле (13); б)- результаты работы [8].

Из рис.11 (а) видно, что со временем плотность потока медленно, но нелинейно возрастает, что находится в согласии с результатами работы [8].

## ВЫВОДЫ

1. Предложен метод искусственной гиперболизации для решения прямой и обратной задач тепло- и массопереноса. Смысл предложенного метода заключается в преобразовании дифференциального уравнения первого порядка по времени параболического типа в дифференциальное уравнение второго порядка по времени гиперболического типа.

2. Установлено, что решение дифференциального уравнения второго порядка по времени для задач прямого и обратного тепло- и массопереноса является устойчивым по отношению к возмущению исходных данных.

3. Показано, что в ограниченных и неограниченных конденсированных средах по мере возрастания линейных размеров тела температура нелинейно уменьшается, что находится в качественном согласии с существующими литературными данными.

4. Показано, что при наличии внешнего источника ход зависимости распределения температуры от изменения длины тела имеет линейный характер и с увеличением длины медленно уменьшается, что находится в удовлетворительном согласии с результатами существующих работ.

5. Установлено, что под воздействием лазерного нагрева температура тела на начальной стадии нелинейно возрастает и достигает максимального значения. При дальнейшем возрастании времени действия лазера температура тела медленно уменьшается и стремится к постоянному значению.

6. Показано, что по мере проникновения тепла в глубь тела температура нелинейно уменьшается и в пределе стремится к постоянному значению.

7. Установлено, что в сосуде плоской геометрической формы, когда распределение концентрации вещества во всех внутренних точках среды задано, то есть известно начальное и конечное распределение массы, тогда плотность потока массы с течением времени нелинейно возрастает.

8. Показано, что в сосуде цилиндрической геометрической формы при заданной концентрации вещества во внутренней и внешней поверхности цилиндра, изменение плотности потока вещества на начальной стадии процесса остается почти неизменной, а в последующие моменты времени имеет тенденцию к медленному уменьшению.

9. Численно установлено, что в сосуде сферической геометрической формы при известных значениях концентрации вещества во внутренней и внешней поверхностях сферы, изменение плотности потока массы с течением времени медленно, но нелинейно возрастает.

### Список опубликованных работ

[A1]. Джураев Х.Ш. Исследование процессов массопереноса методом искусственной гиперболизации / Х.Ш. Джураев, К. Комилов, **З.С. Норматов** // Вестник Таджикского национального университета. 2016, 1/3 (200). –с.151-155.

[A2] Х.Ш.Джураев. Исследование распространения теплового потока в неограниченной среде при наличии внешнего источника / Х.Ш.Джураев, К.Комилов, **З.С.Норматов** // Научно-технический вестник Поволжья, 2015.-№6.-С.10-13.

[A3] Х.Ш.Джураев. Исследование теплопроводности в ограниченной среде методом искусственной гиперболизации / Х.Ш.Джураев, К.Комилов, **З.С.Норматов** // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2015.-№1/5(188).-С.53-61.

[A4] К.Комилов. Исследование теплопроводности в неограниченных средах методом искусственной гиперболизации / К.Комилов, Х.Ш.Джураев, **З.С.Норматов** // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2015.-№1/4(168).-С.75-82.

[A5] Джураев Х.Ш. Метод искусственной гиперболизации для обратной задачи теплопроводности. / Х.Ш. Джураев, **З.С. Норматов** // Вестник Дангаринского государственного университета, 2015, 2(2) - с.5-9.

[A6] Х.Ш.Джураев. Искусственная гиперболизация уравнения теплопроводности / Х.Ш.Джураев, **З.С.Норматов**, Г.К.Собирова // Вестник Таджикского национального университета, 2011.-№4(68).-С.3-7.

[A7] Х.Ш.Джураев. Метод искусственной гиперболизации для обратной задачи теплопроводности / Х.Ш.Джураев, **З.С.Норматов** // Вестник Таджикского технического университета, 2011.-№2(14).-С.3-7.

[A8] Х.Ш.Джураев. Об одном устойчивом методе определения приближенного решения уравнения тепло- и массопереноса / Х.Ш.Джураев, **З.С. Норматов** // Вестник Таджикского национального университета, (Спецвыпуск посвящен Году образования и технических знаний), 2010.- С.50-57.

[A9] Х.Ш.Джураев. Искусственная гиперболизация уравнения теплопроводности / Х.Ш.Джураев, **З.С.Норматов**, Г.К.Собирова // Современный научный вестник, «Руснаучкнига», 2011.-№15(111).С.90-94.

[A10] Х.Ш.Джураев. Метод искусственной гиперболизации к обратной задаче теплопроводности / Х.Ш.Джураев, **З.С.Норматов** // Современный научный вестник, «Руснаучкнига», 2011.-№16(112).-С.92-98.

[A11] Х.Ш.Джураев. О регуляризации решения краевой задачи для параболического уравнения / Х.Ш.Джураев, **З.С.Норматов** // Материалы международной конференции «Наука и современное образование: проблемы и перспективы», Душанбе, ТГНУ, 24-25 октября 2008 г.С.106-107.

[A12] Х.Ш.Джураев. Продолженный тепловой поток на поверхности почвы / Х.Ш.Джураев, **З.С.Норматов**, А.М.Наджмиддинов // Материалы научно-теоретической конференции проф.-преп. состава и студентов ТГНУ, посвящённой 1150-летию А.Рудаки. Душанбе, ТГНУ, 24-25 апреля 2008 г.-С. 48-50.

[A13] Х.Ш.Джураев. О регуляризации обратной задачи теплопроводности в почве. / Х.Ш.Джураев, **З.С.Норматов** // Материалы республиканской конференции «Наука и память» к 70-летию М.Джураева. Душанбе, ТГПУ им. С.Айни, 19 мая 2009 г.С.76-78.

[A14] Х.Ш.Джураев. Об одном устойчивом методе построения приближенного решения уравнения теплопроводности / Х.Ш.Джураев, **З.С.Норматов** // Материалы международной конф. «Современные проблемы физики конденсированных сред и астрофизики», Душанбе, 21-22 мая 2010.-С.48-50.

[A15] Х.Ш.Джураев. Об одном методе искусственной гиперболизации уравнения теплопроводности. / Х.Ш.Джураев, **З.С.Норматов**, Г.К.Собирова // Материалы международной конференции «Современные вопросы молекулярной спектроскопии конденсированных сред». Душанбе, 11-12 ноября 2011.-С.196-198.

[A16] Х.Ш.Джураев. Метод искусственной гиперболизации для уравне-

ния теплопроводности / Х.Ш.Джураев, **З.С.Норматов** //Материалы республиканской конференции по ядерно-физическим методам анализа состава биологических, геологических, химических и медицинских объектов. Душанбе: ТНУ, 19 октября 2014.-С.227-230.

[A17] Х.Ш.Джураев. Тепловые волны в ограниченных и неограниченных средах / Х.Ш.Джураев, К.Комилов, **З.С.Норматов** // Материалы республиканской научной конференции «Современные проблемы физики конденсированного состояния», посвященной 60-летию научно-педагогической деятельности заслуженного работника республики Таджикистан, д.ф.м.н., профессора Ш.Туйчиева и 60-летию со дня образования кафедры физики твёрдого тела ТНУ. Душанбе: Андалеб-Р, 2015.-С.105-107.

[A18] **Норматов З.С.** Математическое моделирование процессов волнового механизма тепло- и массопереноса / **З.С.Норматов** // Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной «700-летию Мир Сайида Али Хамадони», «Году семьи» и международному десятилетию действия «Вода для жизни» 2005-2015 гг. Душанбе, 2015.-С.77.

[A19]. Джураев Х.Ш. Исследование процессов массопереноса методом искусственной гиперболизации. / Х.Ш. Джураев, К. Комилов, **З.С. Норматов** //Математическое моделирование и краевые задачи: М33 Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределёнными параметрами. Информационные технологии в математическом моделировании. –Самара: СамГТУ, 2016, - с.35-38. ил. ISBN 978-5-7964-1904-5

[A20] Джураев Х.Ш. Исследование плотности потоков веществ методом искусственной гиперболизации / Х.Ш. Джураев, К. Комилов, **З.С. Норматов** // Материалы научно-практической конференции «Развития естественных наук в период Независимости Республики Таджикистан» -Бустон: ИГМТ, 2017.- С.39-41.

### Список цитированной литературы

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В.Лыков // М.: Высшая школа, 1966.-600 с.
2. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц //М.: Наука, 1986.-736 с.
3. Волков А.И. Большой химический справочник / А.И. Волков, И.М. Жарский // Минск: Современная школа, 2005.-608 с.
4. Малая Ю.А. Математическое моделирование лазерного нагрева тел с покрытиями на основе нелинейного гиперболического уравнения теплопроводности /Ю.А.Малая, А.И.Губин //Вістник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. –Харків: НТУ «ХПИ», 2012.-№7.-С.174-180.
5. Mehdi Jadidi. Non-fourier heat conduction in a long cylindrical media with insulated boundaries and arbitrary conditions / Jadidi Mehdi // Australian journal of basic and applied sciences, 2009. – No 3(2). – PP.652-663.
6. David J.N. Wall. Invariant imbedding and hyperbolic heat waves / J.N. David J.N. Wall // J. Math. Phys. 38(3), 1997.-PP.1723-1749.
7. Дильман В.В. Методы модельных уравнений и аналогий в химической технологии / В.В Дильман, А.Д.Полянин // М.: Химия, 1990. -304 с.
8. Гупало Ю.П. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком / Ю.П. Гупало, А.Д. Полянин, Ю.С. Рязанцев // М.: Наука, 1985.-336 с.